

ANSCHAUUNG UND DENKEN IN DER GEOMETRIE.

AKADEMISCHE ANTRITTSVORLESUNG

GEHALTEN AM 22. JULI 1899

VON

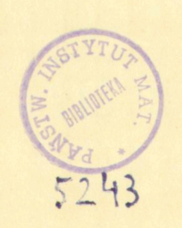
OTTO HÖLDER,

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK IN LEIPZIG.

MIT ZUSÄTZEN, ANMERKUNGEN UND EINEM REGISTER.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.


PAŃSTW. INSTYTUT MAT.
BIBLIOTEKA
5243



Die Art und Weise, wie in der Geometrie Erkenntnisse gewonnen werden, hat von jeher die Aufmerksamkeit der Philosophen erregt. Dass eine Wissenschaft vorhanden ist, die sich auf Dinge ausser uns bezieht und die fortschreitet, indem sie Schluss an Schluss reiht, erschien auffallend und hat zu besonderen Lehren von der Erfahrung und dem Raume geführt. Trotzdem ist die geometrische Methode noch immer nicht genug untersucht. Die Erkenntnisskritiker erörtern die Frage, ob die Geometrie eine Erfahrungswissenschaft ist oder nicht, und verfolgen gewöhnlich die von den Geometern benutzten Kunstgriffe nicht so sehr im Einzelnen, als es wünschenswerth wäre. Die Mathematiker, welche sich mit den Grundlagen der Geometrie und insbesondere mit der sogenannten nichteuklidischen Geometrie beschäftigt haben, die vielfach von philosophischer Seite abgelehnt wird, untersuchen, was aus gewissen Annahmen folgt. Wenn die Geometer sich auch dessen bewusst sind, dass sie diese Annahmen nicht beliebig getroffen haben und sie auch nicht ganz beliebig machen dürften, so liegt es doch in der Natur der Sache, dass sie sich dabei meist nicht um die Quellen kümmern, aus denen jene Annahmen geflossen sind. Sie sind nur bestrebt, die Folgerungen zu entwickeln, und achten auch nicht auf die verschiedenen geistigen Thätigkeiten, die sie bei eben dieser ihrer Arbeit ausüben. Ein Zusammenwirken der verschieden geschulten Kräfte wird am ehesten das Problem lösen, das der Erkenntnisstheorie durch das Vorhandensein der Geometrie gestellt ist.

Hält man unter den Begriffen Umschau, deren der Geometer sich bedient, so bemerkt man einen durchgreifenden Unterschied. Gewisse Begriffe werden durch eine Construction erklärt, andere werden im Grund als gegeben angenommen. Wir werden den Begriff des Quadrats, so populär diese Figur ist, nicht einführen, ohne ihn zu construiren[1]). Wir werden etwa mit einer Quadratseite beginnen, an sie unter einem rechten Winkel die zweite, der ersten gleiche Quadratseite anfügen, dann die dritte Seite und nun die Figur schliessen. Bei dieser Construction wird vorausgesetzt, was eine gerade Linie, was ein rechter Winkel ist und was gleiche Längen sind. Den Begriff der Geraden erklären wir nicht durch eine solche Construction[2]). Die Vorstellung der Geraden erscheint also als eine ursprüngliche. Wie die Gerade so ist auch der Punkt ein für die Geometrie gegebener Begriff. Die Definition, die Euklid von ihm giebt, dass er nämlich das ist, was keine Theile hat, ist nicht geeignet, demjenigen die Vorstellung eines Punktes zu vermitteln, der sie nicht schon besitzt, und es wird diese Definition auch von Euklid nachher nirgends benutzt[3]).

Mit diesen Begriffen, die dem Geometer so zu sagen als ein fertiges Material zu Gebote stehen, werden auch gewisse Aussagen allgemeiner Art von Anfang an aufgestellt, die für diese Begriffe gelten oder gelten sollen. Diese grundlegenden Thatsachen, die ohne Beweis vorausgesetzt werden, werden als Axiome oder Postulate bezeichnet[4]). So wird beständig das Axiom benutzt, dass von jedem Punkte nach jedem andern eine Gerade gezogen werden kann und dass diese Gerade völlig bestimmt ist[5]).

Woher kommen uns nun diese Begriffe, welche die Geometrie als gegeben annimmt, woher die Axiome? Das waren die ersten Fragen, die aufgeworfen wurden, als man sich mit der Erkenntnisstheorie der Geometrie zu beschäftigen anfing. Die Antwort lautet bei den Einen „aus der Anschauung des

Raumes“, bei den Andern „aus der Erfahrung“. Bekanntlich hat Kant in der Anschauung die Quelle unserer geometrischen Erkenntnisse gesehen. Dass diese Erkenntnisse, wie er sagte, nothwendige sind[6]), hat er dadurch zu erklären versucht, dass er eine „reine“, von der Erfahrung unabhängige Anschauung annahm. Dass die Gesetze dieser reinen uns innewohnenden Anschauung auf die Welt, so wie diese uns erscheint, anwendbar sind, wollte er dadurch erklären, dass diese unsere Anschauung die durch unsere Natur gesetzte Bedingung dafür sein sollte, dass wir überhaupt durch unsere Sinne eine Erfahrung von räumlich ausgebreiteten Gegenständen erhalten können. Deshalb sollen gewisse in uns liegende Gesetze der Form unserer Wahrnehmung sich aufzwingen. Die Anschauung macht also bei ihm die äussere Erfahrung möglich und darf daher nicht aus der Erfahrung erklärt werden[7]).

Im Gegensatz zu Kant betrachten Andere die Anschauungsbilder räumlicher Gegenstände, die wir in unserer Phantasie vorfinden, nur als Erinnerungsbilder von Wahrnehmungen des Gesichts- und Tastsinns. Wir können diese Bilder an einander reihen und sie vielleicht noch etwas abändern; sie stammen aber von den Sinneswahrnehmungen ab. Hier erscheint also umgekehrt die Anschauung, welche als Quelle der geometrischen Erkenntnisse angesehen wird, als ein Ergebniss der Erfahrung[8]).

In eine unmittelbare Beziehung zur Erfahrung bringen die Geometrie diejenigen, welche in den Axiomen geradezu die Resultate von an Körpern gemachten Beobachtungen oder von Messungen sehen. Sie erläutern dann auch die Grundbegriffe in einer mehr physikalischen Weise; so ist ihnen die gerade Linie die Sehlinie oder die von einem Faden im Zustand der Spannung angenommene Lage. Diese Auffassung ist von hervorragenden Naturforschern vertreten worden; in neuerer Zeit hat sie Helmholtz besonders betont, sie ist aber

auch schon von Newton gehegt worden[9]). Es ist das eine Auffassung, welche die Anhänger Kant's heftig bekämpfen; denn da sie in der Anschauung die Bedingung der äusseren Erfahrung sehen, so halten sie es für einen circulus vitiosus, wenn Thatsachen, die in der Anschauung enthalten sind, durch Erfahrung begründet werden sollen. Will man die genannte Auffassung durchführen, so muss man jedenfalls, um nicht in Trugschlüsse zu verfallen, sich auf solche Beobachtungen beschränken, die nicht selbst wieder auf geometrische Ueberlegungen gegründet sind[10]). Man muss Thatsachen unmittelbarer Wahrnehmung benutzen.

Eine solche unmittelbare Wahrnehmung dürfte die sein, dass eine Reihe kleiner Gegenstände sich unter Umständen für den Blick decken können, während sie bei einem andern Standpunkt des Beschauers sich nicht decken, dass diese Gegenstände, die sich von einem Standpunkt aus gesehen decken, sich von keinem Standpunkte aus nur theilweise decken[11]). Aus solchen Wahrnehmungen kann der Begriff der geraden Linie und zugleich die Thatsache abgezogen[12]) sein, dass durch zwei Punkte eine und nur eine Gerade geht. Ich habe hier die Thatsachen benutzt, die mit der Sehlinie zusammenhängen. Wir können auch den gespannten Faden heranziehen. Wir müssen dabei annehmen, dass die Gesichtsbilder, die der gespannte Faden darbietet, unter einander eine gewisse unmittelbare[13]) Aehnlichkeit haben und sich unterscheiden von denjenigen, welche der ungespannte Faden darbietet. Das gleichzeitige Auftreten jener ersten Gesichtsbilder mit gewissen Tastempfindungen und mit Muskelgefühlen, welche uns die Anstrengung des Anspannens verursacht, die Erfahrungen, die wir machen, wenn wir den gespannten Faden zupfen oder wenn wir an ihm entlang sehen, bilden hier ein Thatsachenmaterial, aus dem der Begriff der geraden Linie und der mechanische Begriff der Spannung gleichzeitig abgezogen sein kann. Da der

wiederholte Versuch, zwischen zwei Punkten einen Faden zu spannen, immer dieselbe Lage ergiebt, lehrt die Erfahrung, dass zwischen zwei Punkten eine und nur eine Gerade möglich ist.

Ein anderer Begriff, der solchergestalt erklärt werden soll, ist der Begriff der Gleichheit bei Strecken und Winkeln. Ob zwei Strecken gleich gross sind, untersucht man empirisch durch Forttragen eines Zirkels oder eines Massstabes. Der Zirkel oder der Massstab darf sich in der Zwischenzeit nicht ändern, er muss starr sein, und so beruht nach der Ansicht vieler Empiristen der Begriff der Längengleichheit auf dem physikalischen Begriff eines starren Körpers oder etwas Aehnlichem [14]). Ebenso setzt die Vergleichung der Winkel voraus, dass man einen starren Körper bewegt. Man würde nun wirklich einen circulus vitiosus begehen, wollte man gleichzeitig einen starren Körper so definiren, wie man es unter Voraussetzung der Geometrie thut, als einen solchen, dessen Punkte unveränderliche Abstände von einander haben. Um einzusehen, wie man unabhängig von der Geometrie und rein erfahrungsgemäss zu dem Begriff des starren Körpers gelangen könnte, stelle man sich die Wahrnehmungen vor, die wir machen, wenn wir einerseits einen sogenannten starren Gegenstand hin- und herbewegen, andererseits einen Klumpen weiches Wachs oder Thon kneten. In beiden Fällen folgen sich gewisse wechselnde Gesichtsbilder, die von Tastempfindungen begleitet sind und von Muskelgefühlen, in denen wir die Anstrengung unseres Thuns wahrnehmen. Es kommt zugleich in Betracht, dass wir die Veränderungen durch unseren Willen regieren und uns dabei unserer Willensimpulse unmittelbar bewusst werden. Man wird bemerken, dass im ersten Fall immer leicht dieselben Gesichtsbilder reproducirt werden können, was im zweiten Fall nur durch äusserst schwierige Bemühungen gelingt. An der grösseren oder geringeren Leich-

tigkeit, in der die Gesichtsbilder wiederhergestellt werden können, lassen sich die beiden Fälle des starren und des plastischen Körpers unterscheiden.

So etwa könnte man rein erfahrungsgemäss zu dem Begriff eines unveränderlichen, eines starren Körpers gelangen. Giebt man nun zu, dass der mit einem Zirkel ausgeführte Vergleich zweier Abstände eine Beobachtung ist, zu der keine entwickelte Anschauung und keine entwickelten geometrischen Begriffe nothwendig sind, so wird man auch einräumen, dass es dasjenige giebt, was Helmholtz physische Geometrie genannt hat [15]), also eine rein erfahrungsmässige Geometrie; denn durch das Vergleichen von Abständen kann man allein schon zu Lehrsätzen gelangen. Man denke sich z. B. zwei Modelle gearbeitet, jedes mit fünf hervorragenden Punkten, die in beiden Modellen durch dieselben fünf Farben unterschieden sein mögen. Jetzt vergleiche man den Abstand von zwei Punkten des einen Modells mit dem Abstand der beiden gleichgefärbten Punkte des andern. Zehn Mal kann ein solcher Vergleich angestellt werden; gesetzt aber, man findet neun Mal Uebereinstimmung der verglichenen Abstände, so ergiebt sich, dass man dann auch das zehnte Mal Uebereinstimmung findet, und diese Erfahrung wiederholt sich, so oft wir die Probe bei neuen Modellen wiederholen. So würde sich also inductiv durch Messung ein Lehrsatz ergeben [16]).

Ein strenger Kantianer wird freilich den Verdacht nicht los werden, dass jedes solche durch Messungen gewonnene Resultat durch die fertige, exacte Anschauung als Bedingung aller Erfahrung schon beeinflusst sei. Er wird, wenn er seinen Standpunkt festhalten will, vielleicht nicht widerlegt werden können. Andererseits ist nicht zu läugnen, dass sein Standpunkt künstlich ist, und es erscheint berechtigt, dass ihn derjenige fallen lässt, der ohne ihn auskommen zu können glaubt. Einen Vorzug scheint mir die empiristische

Ansicht auch schon dadurch zu haben, dass sie erlaubt, die Anschauung im Einzelnen zu erklären, während dem Kantianer die Hypothese, die er angenommen hat, alles Weitere abschneidet. Es ist aber stets ein Vortheil, neue Probleme gestellt zu bekommen.

Man könnte auch über das Wesen der Anschauung und ihr Verhältniss zur Geometrie die Geschichte der Geometrie oder auch die Entwicklung der Anschauung in einem einzelnen Individuum zu Rathe ziehen wollen. Könnte die Geschichte der Geometrie genauer, als es der Fall ist, heutzutage noch feststellen, wie die Grundbegriffe dieser Wissenschaft sich beim Menschengeschlecht entwickelt haben, so würde dadurch gewiss Licht in diese Fragen gebracht. Es ist wahrscheinlich, dass die Geometrie in alten Zeiten den Charakter einer Erfahrungswissenschaft im engeren Sinn des Wortes gehabt hat, dass sie zugleich damals hauptsächlich praktischen Zwecken gedient hat. Die Geometrie der Aegypter beschränkte sich wohl auf gewisse empirische Regeln, die von Baumeistern und Feldmessern angewendet wurden, während erst die Griechen allmählich gelernt haben, alle Wahrheiten der Geometrie aus wenigen Axiomen zu beweisen[17]). Doch ist diese älteste Entwicklung der Geometrie zu sehr in Dunkel gehüllt, als dass wir aus ihr ganz sichere Schlüsse ziehen könnten.

Da wir auch die Entwicklung der Raumanschauung bei einem einzelnen Menschen kaum werden beobachten können, so bleibt als einziger Weg, das Wesen der Anschauung weiter zu ergründen, eine Analyse der einfachsten[18]) Thatsachen der Wahrnehmung übrig, die unter Umständen durch die Kenntniss des Baues unserer Sinnesorgane unterstützt wird[19]).

Vielleicht führt eine solche psychologisch-physiologische Analyse zu Resultaten, die später einmal allgemeine Anerkennung finden, vielleicht wird die in Rede stehende Frage für alle Zeiten je nach dem philosophischen Standpunkt des Ein-

zelnen verschieden beantwortet. Jedenfalls kann man von dieser Frage unabhängig den ganzen Aufbau der Geometrie betrachten, untersuchen, welche Voraussetzungen die Geometrie thatsächlich benutzt, diese mögen nun herkommen, woher sie wollen, und beobachten, wie aus diesen Voraussetzungen andere Erkenntnisse durch eine Reihe kleiner und sicherer Schritte abgeleitet werden, d. h. wie der Geometer deductiv zu Werke geht. Zu diesem Zweck wird man alle Beweise der Geometrie durchgehen, sie in ihre kleinsten Schritte zerlegen und alle Annahmen beachten, die dabei ausdrücklich oder stillschweigend gemacht werden. Es genügt dabei, die elementare Geometrie vorzunehmen, die höhere wird für den vorliegenden Zweck keine wesentlich andere Ausbeute liefern. Eine Reihe wichtiger Untersuchungen sind von Mathematikern über die Grundlagen der Geometrie gemacht worden, deren Ziel es ist, alle benutzten Axiome festzustellen, diese auf eine möglichst kleine Zahl zu reduciren und von den so übriggebliebenen zu zeigen, dass sie von einander unabhängig sind. Man hat sogar mit Erfolg versucht, eines der Axiome abzuändern und eine nichteuklidische Geometrie zu construiren, von der die gewöhnliche in gewissem Sinn ein Specialfall oder richtiger ein Grenzfall ist [20]). Weniger vollständig untersucht ist die geometrische Deduction selbst.

Ich will sie an einem einfachen Beispiel studiren, indem ich den Beweis des Lehrsatzes von der Winkelsumme im Dreieck in Erinnerung bringe. Dieser Beweis beruht auf zwei von den Parallellinien geltenden Thatsachen, die man so formuliren kann [21]):

1) Wenn zwei in einer Ebene liegende Gerade sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängert — d. h. wenn sie parallel sind — so bilden sie mit einer sie schneidenden Geraden in gewisser Weise gleiche Winkel, und zwar sind die

Winkel gleich, welche zwischen den Parallelen zu verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden liegen.

2) Durch jeden Punkt giebt es zu einer gegebenen Geraden eine Parallele.

Die erste Thatsache ist in etwas anderer Fassung dasjenige Axiom Euklid's, das wir kurz als Parallelenaxiom bezeichnen; es ist dies das Axiom, welches man in der nichteuklidischen Geometrie fallen lässt[22]). Die zweite Thatsache erscheint bei Euklid als ein — auf Grund gewisser Axiome — beweisbarer Lehrsatz; es ist der Satz in Nr. 31 des 1. Buches. Für den vorliegenden Zweck können wir diese Thatsache wie ein Axiom ansehen.

Um nun den Lehrsatz von der Winkelsumme zu beweisen, will ich mir das Dreieck zur Erleichterung der Vorstellung aufrecht denken und zugleich so, dass ich seine Fläche gerade vor mir habe. Die eine Seite, welche als Grundlinie angesehen werden soll, sei horizontal. Durch die Spitze werde nun eine Parallele zur Grundlinie, also bei der angenommenen Vorstellung eine gleichfalls horizontale Gerade gezogen. An der Spitze zeigen sich jetzt drei Winkel, von denen der mittlere ein Dreieckswinkel ist, während die beiden andern eben erst entstanden sind. Diese beiden sind nach dem ersten der angeführten Parallelensätze gleich den an der Grundlinie gelegenen Dreieckswinkeln und zwar der Winkel an der Spitze links gleich dem Dreieckswinkel an der Grundlinie links und der Winkel an der Spitze rechts gleich dem Dreieckswinkel an der Grundlinie rechts. Nun sind die drei Dreieckswinkel durch drei an der Spitze gelegene Winkel repräsentirt; diese erfüllen zusammen den Flächenraum auf der unteren Seite der Parallelen und ergeben deshalb zwei Rechte als Summe.

Bei diesem Beweis ist die durch die Spitze des Dreiecks gezogene Parallellinie ein wesentliches Moment. Es ist schon mehrfach darauf aufmerksam gemacht worden, dass bei den

geometrischen Beweisen die Figur fast regelmässig durch Hilfslinien erweitert wird[23]). Die Möglichkeit, die Hilfslinie zu ziehen, beruht nun hier auf dem zweiten der angeführten Parallelensätze, der besagt, dass es durch jeden Punkt zu jeder Geraden eine Parallele giebt. Dieser Satz ist ein Existentialsatz. Es ist bereits nachdrücklich darauf hingewiesen worden, dass in der Geometrie Existentialsätze eine Rolle spielen[24]).

Was nun aber die hier gezogenen Schlüsse anlangt, so scheint mir, dass sie nicht auf die hergebrachten Formen der schulgemässen Logik passen[25]). Ich würde sie vielmehr folgendermassen schildern. Wir denken uns eine Reihe von geometrischen Elementen, die gewissen Axiomen gemäss in einer bestimmten Reihenfolge construirt sein sollen; damit sind auch Beziehungen zwischen diesen Elementen gegeben. Nun stehen uns noch verschiedene Axiome zu Gebot, die besagen, dass, wenn zwischen mehreren Elementen gewisse Beziehungen bestehen, zwischen diesen allein oder zwischen diesen und zugleich andern Elementen weitere Beziehungen bestehen müssen. Wir können vermittelst dieser Regeln weitere Eigenschaften unserer Figur ableiten. Da ferner die Existentialsätze erlauben, neue Elemente in unbegrenzter Zahl in die Figur hineinzunehmen, können wir aus den in der Figur bekannten Beziehungen andere und andere Beziehungen finden. Wenn nun auch der Fortgang dieses Verfahrens gewissen Regeln folgt, so können wir doch die Resultate, die sich daraus ergeben, nicht im Einzelnen voraussehen, ohne jenes Verfahren in irgend einer besonderen Weise auszuführen. Wir sind dabei genöthigt, zu suchen und umherzutasten, wir machen eine Art von Experiment, auf Grund dessen wir schliesslich vorhersagen, wie die Messungen ausfallen müssten, die wir an einer genau ausgeführten Zeichnung oder an einem Modell vornehmen könnten. Wir haben also ein Gedankenexperiment an Stelle eines Realexperiments gesetzt, und darin besteht die Deduction[26]).

Welche Rolle spielt nun bei der Deduction selbst die Anschauung? Sind aus ihr, beziehungsweise aus der Erfahrung, nur die Elemente entnommen, welche in der Deduction combinirt werden und die Regeln, nach denen combinirt wird, oder wirkt die Anschauung auch noch bei den einzelnen Schritten der Deduction mit? Die letzte Ansicht wird von philosophischer Seite meist vertreten und sie scheint auch die Ansicht Kant's gewesen zu sein, der in der Anschauung das eigentliche Princip sah, zu geometrischen Erkenntnissen zu gelangen[27]). Darauf beruht es wohl auch, dass die meisten Philosophen die nichteuklidische Geometrie ablehnen. Sie betrachten Euklid's Parallelenaxiom als mit der Anschauung nothwendig gegeben[28]) und finden eine Geometrie widersinnig, die eine andere Annahme anschaulich verarbeitet.

Um die Rolle der Anschauung im Beweis klarzustellen, kehre ich zu dem früheren Beispiel zurück. Man wird zugeben müssen, dass wir hier aus der Anschauung entnommen haben, dass jene drei Winkel an der Spitze des Dreiecks zusammen den Winkelraum von zwei Rechten erfüllen, und dass die Winkel an den Parallelen auf die Art liegen, dass sie gleich sind und sich nicht etwa zu zwei Rechten ergänzen. Noch Anderes pflegt man oft der Anschauung unmittelbar zu entnehmen. Man wird z. B. auf Grund der Anschauung ohne Weiteres zugeben, dass die Halbirungslinien zweier Dreieckswinkel sich in einem Punkt des Innern des Dreiecks schneiden, während man nicht unter blosser Berufung auf die Anschauung die Thatsache annehmen wird, dass auch die Halbirungslinie des dritten Winkels durch denselben Punkt hindurchgeht.

Man hat darauf schon hingewiesen, dass wir das Anschauungsbild in gewisser Hinsicht unmittelbar beurtheilen, und dass solche unmittelbare Beurtheilungen im geometrischen Beweis eine Rolle spielen, dass dabei aber nur grobe Beur-

theilungen zugelassen werden, während wir die feineren Beurtheilungen auf dem künstlichen Weg der Deduction umgehen[29]). Dass die Halbirungslinien zweier Dreieckswinkel sich im Innenraum des Dreiecks kreuzen, sagt uns eine grobe Beurtheilung des Dreiecksbildes, dass aber die dritte Halbirungslinie durch denselben Kreuzungspunkt hindurchgeht, kann unser Anschauungsbild, dem immer eine gewisse Unbestimmtheit anhaftet, nicht mit Sicherheit erweisen.

In der That verhalten wir uns gewöhnlich so, wie es eben geschildert worden ist, und in praxi wird das Verfahren auch in Geltung bleiben. Theoretisch hat es einen doppelten Nachtheil. Erstens sind wir vielleicht nicht ganz sicher in der Unterscheidung der groben und der feinen Beurtheilungen. Zweitens ist das Anschauungsbild, das wir vor uns haben, ein einzelnes und dieses eine wird als typisch angenommen für alle Gestalten, welche die Figur des zu beweisenden Lehrsatzes erhalten könnte. Der geometrische Beweis enthält also in dieser Form eigentlich einen Analogieschluss.

Man hat diese letzte Bemerkung auch wiederum unrichtig gefunden mit der Begründung, dass wir uns die Figur, an der wir einen Beweis vornehmen, beweglich denken und dass wir alle Gestalten, die sie annehmen kann, übersehen. Es läge also kein Analogieschluss, sondern eine Art von vollständiger Induction vor, und wir wären der Allgemeingiltigkeit unserer Beobachtung sicher. Diejenigen, welche in der Anschauung ein ganz besonderes Erkenntnissprincip sehen, legen Gewicht auf eine solche Kraft unserer inneren Anschauung, ihre Bilder zu bewegen[30]). Versucht man aber wirklich in einzelnen Fällen sich einen solchen Bewegungsvorgang vorzustellen, so findet man, dass es nur bei ganz einfachen Figuren gelingt. Denkt man sich zwei sich schneidende Gerade, die eine in fester Lage, die andere um den Schnittpunkt drehbar, so wird man leicht übersehen, dass in allen Fällen vier

Winkel und zwar zwei Paare gleicher Winkel entstehen. In verwickelten Fällen ist etwas Aehnliches nicht annähernd möglich, und man stellt sich thatsächlich eine complicirte Figur nie in ihrer ganzen Anlage beweglich vor, nur, bei einer gewissen Sorte von Beweisen, in einzelnen Theilen.

Wir müssten also doch das Mitwirken eines Analogieschlusses im geometrischen Beweis annehmen, wenn wir diesem Beweis nicht eine andere Form geben könnten. Dies ist aber der Fall[31]. Der Gebrauch, den wir im Verlauf der Beweise von der Anschauung machen, lässt sich auf gewisse Regeln bringen, was auf die Formulirung einiger Axiome hinausläuft, die gewöhnlich und auch schon bei Euklid stillschweigend benutzt werden. So braucht man z. B. folgendes Axiom: Wenn A, B, C, D Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und D, C zwischen B und D liegt, so liegt B auch zwischen A und C und C zwischen A und D. Solche Axiome sind neuerdings von Hilbert „Axiome der Anordnung" genannt worden[32].

Einen besonderen Gebrauch macht Euklid von der Anschauung beim Beweis des 1. Congruenzsatzes. Dieser Satz lehrt, dass zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und in dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, auch in den andern Stücken übereinstimmen müssen. Dies wird durch den Hinweis darauf bewiesen, dass das eine Dreieck, wenn es ohne Aenderung seiner Form und Grösse fortbewegt würde, mit dem andern zur Deckung gebracht werden könnte. Dieser Beweis entspricht nicht der früheren Schilderung der Deduction; er besteht im Gegentheil in einem unmittelbaren Hinweis auf die Anschauung oder, wenn wir lieber wollen, auf die bei der Bewegung starrer Körper gemachten Erfahrungen[33]. Der in Rede stehende Congruenzsatz drückt also einen ursprünglichen Anschauungsgehalt aus und muss somit als axiomatisch angesehen werden[34].

Dadurch, dass man so alle anschaulichen Voraussetzungen besonders formulirt, kann man die geometrische Deduction selbst der Anschauung entkleiden. Bezeichnet man die geometrischen Elemente und die Operationen mit diesen Elementen durch Symbole und durch Aneinanderreihen von Symbolen, wie man in der Algebra die Zahlgrössen und die mit ihnen auszuführenden Operationen symbolisch darstellt, so kann man in einfacheren Fällen die geometrische Deduction vollständig in einen mit Symbolen ausgeführten Calcül auflösen, gerade wie in der Algebra die die Zahlgrössen betreffenden Schlüsse durch die sogenannte Buchstabenrechnung vollzogen werden[35]. Für einzelne Gebiete der Geometrie ist schon ein solcher Calcül durchgeführt worden; Peano hat diese symbolischen Verfahren zusammengestellt[36]. Es ist damit eine Idee zur Ausführung gekommen, die Leibniz im Jahre 1679 in einem Brief an den berühmten Physiker Huyghens ausgesprochen hat. Leibniz drückt sich an dieser Stelle folgendermassen aus[37]: „Ich habe gewisse Anfangsgründe einer neuen, von der Algebra völlig verschiedenen Zeichensprache gefunden, durch die man mit grossem Vortheil genau und der Sache gemäss, ohne Figuren, alles das in Gedanken darstellen kann, was von der Anschauung abhängt.“ An einer späteren Stelle dieses Briefs[38] will Leibniz seiner Zeichensprache bereits eine viel ausgedehntere Anwendung zuschreiben. Hier zeigt sich die für ihn charakteristische Ueberschätzung begrifflicher Operationen[39]. Huyghens zeigt sich gleich von Anfang an der neuen Methode gegenüber sehr misstrauisch[40]. Es lässt sich auch nicht läugnen, dass eine so rein formelle, in einen Calcül gekleidete Schlussweise nur für ganz begrenzte Gebiete ausreichend ist.

Wenn wir die Schlüsse der Geometrie in der erwähnten Weise der Anschauung entkleiden, so können wir auch mit voller Sicherheit sagen, dass etwas aus bestimmten Annahmen

folgt, und wir könnten es selbst dann noch, wenn diese Annahmen der Anschauung widerstreiten würden. So folgt mit Sicherheit aus den Voraussetzungen Lobatschefskij's, dass in keinem Dreieck die Winkelsumme grösser sein kann als zwei Rechte, und dass sie in jedem Dreieck wirklich kleiner sein muss als zwei Rechte, wenn sie in einem Dreieck kleiner ist[41]).

Die erwähnte Form der Deduction, gewissermassen ihre Reindarstellung, ist gewöhnlich nicht der Weg der geometrischen Erfindung. Diese ist meist durch Anschauungsbilder, manchmal durch Beobachtungen, die in einer Reihe von Fällen gemacht worden sind, also durch Analogie und Induction geleitet, wie denn vielfach in allen Gebieten der Mathematik inductiv gewonnene Ergebnisse der deductiven Erfindung die Richtung geben[42]).

Wir haben in der Geometrie die ursprünglichen, der Anschauung oder der Erfahrung entlehnten Begriffe unterschieden von den geometrisch construirten Begriffen. Es kommt aber auch vor, dass Begriffe, die ohne Zweifel unmittelbar aus der Anschauung abgezogen sind, nachträglich abgeleitet werden können. Ein lehrreiches Beispiel dafür haben wir in den verschiedenen Behandlungen der Proportionenlehre. Der Begriff der Proportion von Längen steht in einem nahen Zusammenhang mit dem Begriff der Aehnlichkeit der Körper und der ebenen Figuren. Dass wir einen Körper in seiner wahren Form und zugleich in einem andern Massstab nachbilden können, mag als eine unmittelbare Thatsache der Anschauung gelten. Es haben in einem solchen Fall die Kanten in der Nachbildung unter einander dieselben Verhältnisse wie die Kanten des ursprünglichen Körpers, und es sind auch alle Winkel dieselben geblieben. Giebt man von vornherein zu, dass man so zu einem beliebigen Körper einen ähnlichen in irgend welchem Massstab construiren kann[43]), so lassen sich alle von Streckenproportionen geltenden Sätze leicht erkennen. Es mag auch

sein, dass wir den Begriff der Proportion an der Thatsache, dass es ähnliche Körper giebt, gebildet haben[44]). Euklid begründet umgekehrt die Existenz geometrisch ähnlicher Figuren durch die Proportionenlehre[45]). Er hat aber auch noch den Begriff der Proportion auf einfachere Begriffe zurückgeführt. Um diese Ausführungen Euklid's[46]), die früher lange nicht verstanden und für überflüssig gehalten worden sind, zu würdigen, muss ich auf den Begriff des Längenmasses eingehen.

Man stellt manchmal den Begriff des Längenmasses an den Anfang der Geometrie, ohne ihn gehörig zu begründen. Dabei wird einfach vorausgesetzt, dass alle die in einer Figur vorkommenden Längen zu einer von ihnen, die wir wählen können, ein bestimmtes Zahlverhältniss haben. Die eine gewählte Länge heisst dann die Längeneinheit. Die Zahl, welche angiebt, wie oft die Einheit in einer andern Strecke enthalten ist, heisst die Masszahl dieser Strecke. Diese zu messende Strecke kann zur Einheit commensurabel oder incommensurabel sein, und ihre Masszahl ist im zweiten Fall eine Irrationalzahl; so ist z. B. die Masszahl der Quadratdiagonale irrational, wenn die Quadratseite zur Einheit gewählt wird.

Bei genauerer Betrachtung liegt aber im Begriff des Masses eine Schwierigkeit verborgen. Betrachten wir auch nur zwei commensurable Strecken. Um ihr Längenverhältniss als Zahlverhältniss aufzufassen, müssen wir uns eine Strecke denken, von der die gegebenen beide Vielfache sind. Es liegt in der Commensurabilität, dass es eine solche dritte Strecke giebt; es giebt aber mehr als bloss eine solche Strecke. Wie wäre es nun, wenn wir bei verschiedener Wahl dieser dritten Vergleichsstrecke verschiedene Zahlverhältnisse für die beiden gegebenen herausmessen könnten? Wir müssen beweisen, dass dies nicht möglich ist, wenn wir den Begriff des Masses begründen wollen. Freilich können wir diesen Begriff auch

ohne Begründung zulassen; das ist mit der Annahme neuer und im Grund complicirter Axiome gleichbedeutend.

Der erwähnte Beweis kann aber geführt werden mit Hilfe der beiden Thatsachen, dass Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches und Grösseres zu Grösserem addirt Grösseres giebt[47]). Diese Thatsachen mögen als Axiome angesehen werden[48]). Nimmt man noch das sogenannte archimedische Axiom hinzu, wornach wir durch Vervielfachung einer jeden Strecke jede andere Strecke übertreffen können[49]), benutzt man ausserdem die Parallelen- und Congruenzsätze, so kann man nach Euklid's Vorgang die ganze Lehre von den Proportionen und von den ähnlichen Figuren aufbauen[50]). Die Definition der Proportion, welche Euklid[51]) dabei benutzt, und durch die er diesen Begriff, wie schon erwähnt, auf einfachere Begriffe zurückführt, kann folgendermassen wiedergegeben werden: Zwei Strecken a und b verhalten sich dann zu einander wie a' zu b', wenn jedes Vielfache μa von a im Vergleich zu jedem Vielfachen νb von b kleiner oder gleich oder grösser ist, je nachdem das entsprechende Vielfache $\mu a'$ von a' kleiner oder gleich oder grösser ist als das entsprechende Vielfache $\nu b'$ von b'[52]). Diese Definition ist für zwei incommensurable Strecken a und b ebenso gut anwendbar wie für commensurable Strecken.

Galilei hat eine andere Behandlung der Proportionen unternommen, indem er eine Vereinfachung der euklidischen Darstellung anstrebte. Er musste aber dabei den Begriff der Proportion postuliren und verschiedene Axiome einführen, die sich auf ihn beziehen[53]). Seine Beweisführung genügt nicht der Forderung, dass möglichst wenig vorausgesetzt werden soll. Aus diesem Grund ist die Darstellung Euklid's als wissenschaftlich vollkommener anzusehen.

Eine ganz neue Herleitung der Proportionenlehre hat in der letzten Zeit Hilbert gegeben[54]). Bei dieser Darstellung wird auch das archimedische Axiom vermieden.

Bei dieser Herleitung, wie bei der euklidischen, erscheint der Begriff „gleich“ als ursprünglicher Begriff, für den noch gewisse Axiome angenommen werden. Der Begriff des Längenverhältnisses zweier Strecken und der Proportion zwischen vier Strecken wird construirt[55]); die Lehrsätze von den Proportionen erscheinen als beweisbar[56]).

Ein Begriff, den Euklid nicht in dieser Weise deductiv construirt hat, bei dem dies aber auch möglich ist, ist derBegriff des Inhalts bei ebenen Figuren und bei Körpern. Man kann den Inhalt bei Körpern als einen Erfahrungsbegriff ansehen, der aus dem Gebrauch der Hohlmaasse bei Flüssigkeiten abgezogen ist, und von dieser Seite kann man dann auch zum Inhalt ebener Flächen gelangen. Euklid führt es als etwas selbstverständliches ein, dass einer Figur ein Inhalt zukommt, und dass auch für solche Grössen die Axiome bestehen, dass Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches und Grösseres zu Grösserem addirt Grösseres giebt. Will man aber den Inhaltsbegriff nicht voraussetzen, sondern geometrisch begründen, so muss man zuerst nachweisen, dass Figuren, insbesondere solche von verschiedener Form, einer Vergleichung in Beziehung auf die Grösse fähig sind. Man wird congruente Figuren zunächst für gleich erklären; von zwei Figuren, deren eine die andere ganz umschliesst, wird man die erste grösser nennen als die zweite. Um aber zwei beliebige Figuren vergleichen zu können, muss man Zerschneidungen benutzen und beweisen, dass der Vergleich der Figuren unabhängig davon ausfällt, ob man die eine oder die andere der möglichen Zerschneidungen anwendet[57]).

Die Constructionen der Streckenproportion und des Inhaltsbegriffs setzen voraus, dass gewisse geometrische Operationen eine unbestimmte Anzahl von Malen wiederholt werden. So mussten wir bei der Betrachtung der Proportionen eine Strecke ver-n-fachen, wobei n eine unbestimmt gelassene Zahl war. In solche Betrachtungen spielen allgemeine Begriffe der

Arithmetik hinein, und es können derartige Ueberlegungen nicht immer in einen mechanischen Calcül aufgelöst werden[58]). Zugleich mit den arithmetischen und überhaupt den combinatorischen Begriffen, die in die Geometrie mit eintreten, kommen auch verwickeltere Schlussweisen in die Geometrie.

Ein Beispiel für eine solche Schlussart mag die sogenannte Exhaustionsmethode abgeben[59]), welche Inhalte krummlinig begrenzter Figuren auszuwerthen gestattet. Ich will die Kreisfläche betrachten. Ihr Inhalt ist dem Inhalt eines Dreiecks gleich, das den Kreisumfang zur Grundlinie und den Kreisradius zur Höhe hat. Um dies zu beweisen, kann die Vergleichung der Inhalte nicht durch eine bestimmte Anzahl von Zerschneidungen ausgeführt werden. Man muss deshalb zur Vermittlung noch gewisse Vergleichsfiguren benutzen, welche die Kreisfläche nur näherungsweise darstellen. So lässt sich ein dem Kreis einbeschriebenes regelmässiges Achteck zuerst mit der Kreisfläche und dann mit dem Dreieck vergleichen, wodurch sich ergiebt, dass Dreieck und Kreisfläche jedenfalls nicht um mehr als die Hälfte dieser verschieden sind. Die Schwierigkeiten, welche bei dem eben genannten Vergleich noch überwunden werden müssen, mögen hier übergangen werden. Nachher kann man dem Kreis ein regelmässiges Sechszehneck einbeschreiben, mit Hilfe dessen man nachweist, dass Dreieck und Kreisfläche um weniger als $^1/_4$ der Kreisfläche verschieden sind. Das geht nun so fort. Man zeigt mit Hilfe des regelmässigen einbeschriebenen Vielecks, das 2^{n+2} Ecken hat, dass das Dreieck sich von der Kreisfläche um weniger als den $2^{n\text{ten}}$ Theil dieser unterscheidet. Instinctiv wird nun jedermann einsehen, dass die exacte Gleichheit von Kreis- und Dreiecksfläche gefolgert werden kann.

Um logisch streng zu verfahren, beachte man zunächst, dass eigentlich unendlich viele Ergebnisse vorliegen. Die Differenz derselben beiden Figuren ist kleiner als $^1/_2$, kleiner als

$^1/_4$, als $^1/_8$ u. s. f. der einen Figur. Trotz der unbegrenzten Zahl dieser Ergebnisse sind wir ihrer aller sicher, weil sie sich gleichmässig ergeben, indem die ganze Reihe der Betrachtungen, die zu diesen Ergebnissen führen, nach einem Gesetz verläuft und sich deshalb überschauen lässt. Diese unendlich vielen Ergebnisse enthalten alle nur Annäherungen. Das aus ihnen zu erschliessende Resultat besteht in einer völlig genauen Aussage. Um nun zu dieser zu gelangen, wendet man die Sache anders. Man benutzt die Thatsache, dass wenn zwei Inhalte — hier die Dreiecks- und die Kreisfläche — nicht genau gleich sind, ihre Differenz sich als eine bestimmte Fläche darstellen lässt. Die Betrachtung dieser Fläche führt auf einen Widerspruch. Der Beweis ist also ein indirecter[60]).

Ich will ihn nun ausführlich schildern. Man denke sich die erwähnte Fläche verdoppelt, die so erhaltene Fläche wieder verdoppelt und so fortgefahren. Durch hinreichend häufige Wiederholung dieser Verdopplungen muss jedes gegebene Flächenstück übertroffen werden können. Das folgt aus dem archimedischen Axiom, wenn dieses auf Flächen angewendet wird. Jene Fläche soll nun n-mal verdoppelt und n so gross gewählt werden, dass dabei die Kreisfläche übertroffen wird. Es ist dann das 2^n-fache jener Fläche grösser als der Kreis, also jene Fläche, d. h. die Differenz zwischen Kreisfläche und Dreiecksfläche, grösser als der $2^{n\text{te}}$ Theil der Kreisfläche. Dies widerspricht aber gerade dem Ergebniss, das vorhin gewonnen worden war mit Hilfe des einbeschriebenen Vielecks, das 2^{n+2} Ecken hat. Aus diesem Widerspruch folgt die Unrichtigkeit der einzigen unsicheren Annahme, die wir eingeführt haben, dass nämlich die Kreisfläche und die Dreiecksfläche verschiedenen Inhalt haben sollten. Dieses Beispiel scheint mir zugleich zu zeigen, dass man in der Geometrie nicht ohne die indirecte Beweisform auskommen kann[61]).

Ganz ähnlich, wie ich sie im Vorhergehenden in der Geo-

metrie geschildert habe, erscheint die Deduction überall, wo sie in den exacten Wissenschaften angewendet werden kann. Besonders deutlich zeigt sich dies in der Mechanik. Die meisten Beweise der Mechanik sind für mich so gut Beweise wie irgend einer in der Geometrie, sie sind es darum nicht weniger, dass sie Voraussetzungen brauchen, von denen hier wohl allgemein angenommen wird, dass sie der Erfahrung entstammen[62]). Denselben Ursprung nehmen ja die Empiristen von den Axiomen der Geometrie an, ohne deshalb die deductive Methode zu verwerfen, mittelst deren diese Wissenschaft ihre Erkenntnisse vermehrt. Eine solche Erfahrungsthatsache, welche für die deductive Mechanik die Bedeutung eines Postulats (Axioms) hat, ist z. B. die, dass der Angriffspunkt einer an einem starren Körper wirkenden Kraft in der Linie dieser Kraft verlegt werden kann, ohne dass die Wirkung sich ändert. Das Galilei'sche Trägheitsprincip und die „leges" von Newton[63]) sind derartige Postulate. Diese Postulate und die Begriffe: Kraft (Anziehungs-, Abstossungskraft, Druck, Spannung), starre Verbindung, Masse, Zeit, Ort, zwischen denen die Postulate Beziehungen setzen, gehen durch eine gewisse Verallgemeinerung und Idealisirung[64]) des in der Erfahrung Beobachteten hervor. Sie können insofern für einleuchtend gelten, als die meisten Menschen sich durch die Beobachtungen des täglichen Lebens allein schon bestimmen lassen, diese Begriffe und Begriffsverbindungen als giltig anzuerkennen[65]).

Logisch nothwendig sind weder die mechanischen Postulate (Axiome) noch die mechanischen Grundbegriffe. Alle Versuche, die Grundbegriffe befriedigend zu definiren, sind gescheitert. Sie können nur überliefert werden durch den Hinweis auf die einfachen Thatsachen, von denen sie abgezogen sind[66]).

Wir brauchen die mechanischen Grundbegriffe ganz ähnlich wie die geometrischen[67]). Innerhalb der Deduction machen wir von den Begriffen nur einen formalen Gebrauch. Die

wirkliche Anwendung der Begriffe nach ihrem Inhalt würde die sein auf die Gegenstände, auf welche die Begriffe sich beziehen. Die Thatsache, dass eine Gerade, die mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, ganz in die Ebene fällt, wird in der Raumgeometrie rein formal benutzt, um die gegenseitigen Beziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen in einem Lehrsatz zu beweisen. Wirklich angewendet wird die Thatsache von dem Steinmetz, der seine Schiene in allen Richtungen dem Block anlegt, den er in einer ebenen Fläche behaut. Ebenso machen wir in der Lehre vom Gleichgewicht von dem Begriff Kraft einen formalen Gebrauch, während wir diesen Begriff wirklich anwenden in irgend einer materiellen Vorrichtung, bei der wir Druck und Spannung erzeugen. Wir operiren also in der Deduction nicht mit den Objecten selbst, sondern wir operiren nur in Gedanken mit den gegenseitigen Beziehungen der Objecte.

Vielleicht lässt sich in der Mechanik die Deduction nicht so rein darstellen wie in der Geometrie. Vielleicht benutzen wir in der Mechanik, die mehr stofflichen Inhalt hat, noch ausser den Axiomen nebenher und unbewusster Weise gewisse Erfahrungsanalogien. Jedenfalls aber ist es richtig, dass wir auch in der mechanischen Deduction zum mindesten zeitweise den Gegenstand, den wir untersuchen, völlig verlassen und von ihm unabhängig ein Gedankenexperiment ausführen im Vertrauen, dass das so gewonnene Resultat schliesslich mit dem Gegenstand übereinstimmen muss. Dass wir ein solches Verfahren mit Erfolg anwenden können, beruht auf der, freilich nicht eigentlich beweisbaren, aber doch in gewissem Sinn sich bestätigenden[68]) exacten Giltigkeit der Gesetze, die wir an der Hand der Beobachtung gefunden und als allgemein richtig angenommen haben. Deshalb ist diese Art der Deduction auf die exacten Naturwissenschaften anwendbar; man würde aber ein Verfahren, das für die Mathematik, die Mecha-

nik und für gewisse Theile der Astronomie und der Physik[69]) anwendbar ist, vergeblich auf die Formen der organischen Lebewesen oder gar auf historische Wissenschaften anzuwenden versuchen.

Dieses Verfahren der Deduction besteht aus Schlüssen von ganz eigenartiger Form, wie sie die angeführten Beispiele gezeigt haben. Die mathematischen Wissenschaften haben also in der That eine besondere Methode. Nicht als ob das Denken an sich nicht immer dasselbe wäre und nicht immer in denselben einfachen geistigen Thätigkeiten bestünde. Die Besonderheit beruht lediglich im Gegenstand, der lange Reihen von Denkoperationen in gewissen charakteristischen Verbindungen vorzunehmen gestattet, so dass dadurch besondere Schlussformen entstehen. In diesem Sinn kann man also sagen, dass die Mathematik und die exacten Naturwissenschaften ihre eigene Logik haben.

Anmerkungen und Zusätze.

1) Bei Euklid (vrgl. Euclidis Elementa ed. J. L. Heiberg 1883) wird das Quadrat in Nr. 46 des 1. Buchs construirt.

2) Euklid's Definition der geraden Linie enthält keine Construction und ist als blosse Namenserklärung aufzufassen (1. Buch, 4. Definition); es wird auch nachher von dieser Definition nirgends Gebrauch gemacht.

3) In seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882) erklärt sich Pasch folgendermassen über den Begriff des Punktes: „Allemal aber werden diejenigen Körper, deren Theilung sich mit den Beobachtungsgrenzen nicht verträgt, Punkte genannt, während das Wort „Körper" in der Geometrie zu einem andern Gebrauch vorbehalten bleibt." Damit ist die Abstraction angedeutet, durch die wir uns den Begriff eines Punktes gewonnen denken können; es wird aber diese Erklärung so wenig als irgend eine der jemals vom Punkt gegebenen Erklärungen beim Aufbau der Geometrie angewendet.

4) Wir unterscheiden in der That kaum zwischen Axiomen und Postulaten; wenn wir es thun, so wollen wir höchstens eine Schattirung in unserer Auffassung zum Ausdruck bringen, indem wir mit dem Wort „Axiom" betonen wollen, dass es sich um eine sehr sichere Voraussetzung handelt, mit dem Wort „Postulat" dagegen, dass die Allgemeingültigkeit der aufgestellten Regel im Grund doch nur von uns gefordert wird. Bei Euklid erscheinen zwei Gruppen von Grundsätzen, die *αἰτή*-

ματα (postulata) und die κοιναὶ ἔννοιαι (communes animi conceptiones), welche letzteren bei Proclus als ἀξιώματα bezeichnet sind. Demnach scheint Euklid jene Grundsätze als Forderungen, diese als selbstverständliche Wahrheiten angesehen zu haben. Einigermassen erscheint dies auch nach dem Inhalte der Grundsätze begreiflich, wenn man die Vertheilung der Grundsätze betrachtet, wie sie in der auf genauen Quellenstudien bearbeiteten Heiberg'schen Ausgabe sich findet. In andern Ausgaben ist die Vertheilung eine andere (man vrgl. z. B. die auf der Oxforder Ausgabe von 1703 beruhende deutsche Uebersetzung von Lorenz von 1781).

5) Die erste der genannten Thatsachen ist bei Euklid in der ersten Forderung enthalten, die zweite fehlt in der Heiberg'schen Ausgabe, während sie in andern Ausgaben in der Form des 12. Axioms erscheint. Dieses Axiom, das demnach einen spätern Zusatz vorstellen dürfte, sagt aus, dass zwei gerade Linien keinen Raum einschliessen. Würde man in einer Ebene zwei Punkte durch zwei verschiedene gerade Strecken verbinden können, so würden diese einen Flächenraum einschliessen; es folgt also aus dem 12. Axiom, dass nur eine gerade Verbindungslinie zweier Punkte möglich ist. Thatsachen von der Art, um die es sich hier handelt, nennt Hilbert (Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals, 1899, S. 5) Axiome der Verknüpfung.

6) Man kann bestreiten, dass die Axiome der Geometrie in Kant's Sinne nothwendig sind; sie können auch nur in dem Sinne nothwendig sein, in dem wir die Naturgesetze so nennen. Wollte man aber aus der gegenseitigen Uebereinstimmung der verschiedenen Folgerungen, die sich aus den Axiomen ziehen lassen, auf eine Art innerer Nothwendigkeit dieser schliessen, so kann man einwenden, dass die nichteuklidische Geometrie in sich ebenso widerspruchslos ist wie die

euklidische (man vergleiche Anm. 20). In diesem Zusammenhang haben die mathematischen Untersuchungen über die nichteuklidische Geometrie die empiristische Auffassung in der Erkenntnisstheorie gefördert. So vertritt Benno Erdmann (Die Axiome der Geometrie 1877, S. 116) die Ansicht, dass eine negative Bedeutung der neuen geometrischen Erkenntniss für die rationalistische Theorie gesichert ist.

Im Sinne der empiristischen Theorie kann man die Axiome nicht streng nothwendig nennen; es kann wohl aus ihnen etwas streng nothwendig folgen, dagegen wird die Allgemeingiltigkeit der Axiome gefordert (m. vrgl. auch John Stuart Mill, a system of logic ratiocinative and inductive, 7. Ausg. 1868, 1. Bd. S. 254).

7) In der „Kritik der reinen Vernunft" 1. Ausgabe 1781, Elementarlehre I. Theil 1. Absch. Nr. 2 sagt Kant, dass der Raum eine „nothwendige Vorstellung a priori" sei, die allen äusseren Anschauungen zum Grunde liege, und dass er „als die Bedingung der Möglichkeit der Erscheinungen und nicht als eine von ihnen abhängende Bestimmung" anzusehen sei. Noch deutlicher wird in einem Zusatz der 2. Ausgabe von 1787 (Elementarlehre I. Th. 1. Absch. § 3) gesagt, dass die Vorstellung des Raumes „reine nicht empirische Anschauung" sei und dass diese Anschauung bloss „im Subjecte, als die formale Beschaffenheit desselben von Objecten afficirt zu werden und dadurch unmittelbare Vorstellungen derselben, d. i. Anschauung zu bekommen, ihren Sitz hat". Auf diese Nothwendigkeit der Vorstellung des Raumes wird (1. Ausg. a. a. O. Nr. 3 u. 4) dann die „apodictische Gewissheit aller geometrischen Grundsätze" gegründet. Es ist dabei ganz deutlich, dass sich Kant wirklich die einzelnen Axiome aus der reinen Anschauung hervorgegangen denkt, denn er sagt a. a. O.: „So werden auch alle geometrischen Grundsätze, z. E. dass in einem Triangel zwei Seiten zusammen grösser seien, als die dritte, niemals

aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Anschauung und zwar a priori mit apodictischer Gewissheit abgeleitet.“ (Die angeführte Thatsache würden wir nicht einmal zu den Grundsätzen rechnen.)

8) Es ist nicht meine Absicht, auf alle die Auffassungen einzugehen, welche die Schöpfer der verschiedenen philosophischen Systeme vom Raum und von der räumlichen Anschauung gehabt haben. Man vrgl. hierzu Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik 1. Bd. 1868, 2. Bd. 1869 und Wundt, Logik 2. Bd. 1883, S. 85 bis 96.

9) Man vrgl. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, Cantabrigiae 1686 Vorrede, v. Helmholtz, Vorträge und Reden 2. Bd. 1884, S. 217: Die Thatsachen in der Wahrnehmung. Die Vertreter dieses empiristischen Standpunktes wollen natürlich nicht läugnen, dass jede Bearbeitung der Erfahrung von Voraussetzungen ausgeht, zum mindesten von der Voraussetzung einer gewissen Gesetzmässigkeit des zu untersuchenden Gegenstandes, dem wir sonst mit Begriffen gar nicht beikommen könnten (m. vrgl. insbesondere Helmholtz a. a. O. S. 266 ff.). Ja es ist sogar jede einzelne Erfahrungsthatsache, sofern sie mit Hilfe von Begriffen ausgedrückt wird — und wie wollten wir sie sonst ausdrücken — das Ergebniss einer geistigen Bearbeitung der Erfahrung. Was aber der Empirismus im Gegensatz zur Kant'schen Auffassung betont, ist, dass nach empiristischer Ansicht kein Gesetz, das sich auf äussere Gegenstände bezieht, unabhängig von der äusseren Erfahrung zu Stande kommt, während Kant sagt, dass die Erkenntnisse der Geometrie aus der Anschauung stammen, und die Anschauung von der Erfahrung unabhängig sei.

10) Benutzt man z. B. beim Messen eine Mikrometerschraube, so schliesst man aus den Umdrehungen und deren Bruchtheilen auf die Verschiebung der Längsaxe der Schraube. Bei derartigen Messungen macht man also schon von einer

Reihe von Beziehungen der wissenschaftlichen Geometrie Gebrauch, und es müssen somit solche Beobachtungen, welche als für die Geometrie grundlegend angesehen werden sollen, jedenfalls von weit einfacherer Natur sein als eine derartige Messung.

11) Wenn der Beobachter zwischen die Gegenstände tritt, wird er allerdings nur einen Theil auf einmal erblicken können; diejenigen, welche er erblickt, werden sich aber alle decken, wenn er so steht, dass zwei von ihnen sich decken.

12) Für den Kantianer würde die Thatsache, dass gewisse kleine Körper bei einem bestimmten Standpunkt des Beschauers sich gedeckt haben, die Veranlassung dafür sein, dass der Beschauer in seiner Anschauung, die er unabhängig von der Erfahrung besitzt und durch die ihm auch das Wesen der geraden Linie völlig gegeben ist, die Orte jener Körper geradlinig entwirft. Für den Empiristen ist die Gerade gar nichts Anderes als ein Begriff, der von dem Vorkommniss des Sichdeckens kleiner Körper oder auch von andern ähnlichen Vorkommnissen abstrahirt ist.

Wenn ich den Vorgang der Begriffsbildung einem bekannten Sprachgebrauch gemäss als ein „Abstrahiren“ oder „Abziehen“ bezeichne, so will ich mich nicht einer Lehre anschliessen, die den Begriff aus einer Reihe von Vorstellungen dadurch hervorgehen lässt, dass wir diejenigen Merkmale „weglassen“, in denen die Vorstellungen sich unterscheiden und diejenigen beibehalten, in denen sie übereinstimmen. Wenn wir uns an einer Reihe von Vorstellungen einen Begriff bilden, so wird die Grundlage immer die sein, dass wir jene Vorstellungen unmittelbar als ähnlich empfinden und im Zusammenhang mit dem Sprachgebrauch Anderer den Gebrauch eines Wortes erlernt haben, durch welches wir das an jenen Vorstellungen Typische ausdrücken wollen. Wir sagen, dass wir den Begriff beherrschen, wenn wir glauben, dass wir ihn auch

in künftigen Fällen in sicherer Weise und in Uebereinstimmung mit Andern anzuwenden vermögen. Dass wir dies vermögen, können wir im Grund nie beweisen, sondern nur fordern (m. vrgl. Volkelt, Erfahrung und Denken 1886, S. 181 ff.). Insbesondere fordern wir den unbedingt sichern Gebrauch der Begriffe in der wissenschaftlichen Betrachtung. So thun wir in der Geometrie nicht nur, als ob wir genaue Punkte und genaue Gerade aufzeigen könnten, sondern auch, als ob wir, wenn eine Gerade und ein Punkt gegeben ist, stets unterscheiden könnten, ob der Punkt auf der Geraden liegt oder nicht, wobei also auch der Begriff dieses Unterschieds als unbedingt anwendbar angesehen wird.

Von dem empiristischen Standpunkt aus betrachtet erscheinen die geometrischen Begriffe zunächst kaum verschieden von andern durch Abstraction gewonnenen Erfahrungsbegriffen. Der von Wundt (Logik 2. Bd. S. 95) stark betonte Unterschied jener Begriffe von diesen stellt sich erst nachher im wissenschaftlichen Gebrauch der geometrischen Begriffe heraus, der auch ihren praktischen Gebrauch beeinflusst (m. vrgl. Anm. 64).

Wie wir an einer Reihe von Vorstellungen einen Begriff abziehen oder abstrahiren können, so können wir an einer Reihe von Vorstellungsverbindungen eine Regel abstrahiren, wenn wir die Vorstellungsverbindungen nicht nur unter einander, sondern auch mit einem zusammengesetzten Bewusstseinsvorgang ähnlich finden, der dadurch jene Vorstellungsverbindungen abbildet und so ihre Regel darstellt. Wir können z. B. in einer Reihe von Fällen gesehen haben, dass ein zwischen zwei kleinen Ringen ausgespannter Faden eine völlig bestimmte Lage annimmt. Wir vergleichen mit diesen Beobachtungen einen Bewusstseinsvorgang, wenn wir drei Elemente unterscheiden und von diesen das eine durch die beiden andern bestimmt denken, und indem wir für alle Fälle von der Art derer, die wir beobachtet haben, unsern Gedanken als allgemein giltig

postuliren, kommen wir zu der Regel: „Durch zwei Punkte geht stets eine und nur eine Gerade.“ Wie nun der gewöhnliche Begriff für das Denken einheitlich ist und demgemäss auch meistens an ein einzelnes Wort geknüpft erscheint, so ist eine solche Regel ein „Begriff höherer Ordnung“, der eine logische Gliederung zeigt (Volkelt a. a. O. S. 384).

13) „unmittelbar“ soll hier bloss heissen, dass wir die Reihen von Sinnesempfindungen, auf denen die für unser Bewusstsein zunächst einheitlichen Gesichtsbilder beruhen, unmittelbar als ähnlich beurtheilen. Es widerspricht dies also nicht einer Auffassung der Physiologie, nach der solche Vergleiche von Gesichtsbildern erst auf Grund der Augenbewegungen möglich sind.

14) Helmholtz a. a. O. S. 260. Man kann für die Vergleichung der Abstände auch den Faden verwenden. Es wird hierbei eingewendet werden, dass ein Vergleich von Abständen nur mittelst eines unelastischen Fadens möglich ist, dass man aber kein Unterscheidungsmerkmal des unelastischen Fadens vom elastischen habe ausser der Unveränderlichkeit der Länge des ersten, womit man sich schliesslich im Kreise bewegen würde. Diesem Einwand gegenüber möchte ich bemerken, dass wir an einem Stück unelastischen Fadens, das wir zwischen beiden Händen gespannt halten, durch eine blosse Verstärkung unserer spannenden Anstrengung gar keine sichtbare Veränderung hervorbringen können, während wir beim elastischen Faden dies können und dass wir hierin ein Merkmal des unelastischen Fadens haben, das den fertigen Begriff der Länge nicht voraussetzt.

Wahrscheinlich kann man noch auf verschiedene andere Arten eine Erklärung des Gleichheitsbegriffs von Strecken versuchen (m. vrgl. Helmholtz' Bemerkungen über „physische Gleichwerthigkeit“ von Raumgrössen a. a. O.). Die obigen Ausführungen bezwecken nur zu zeigen, dass man in der That

die Begriffe „gleich“, „grösser“, „kleiner“ als von gewissen empirischen Thätigkeiten abgezogen ansehen kann, ohne die Behauptung, die schon aufgestellt worden ist (Zindler, Sitzungsberichte der phil.-hist. Classe der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien, 118. Bd. 1889: Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntniss S. 11), zugeben zu müssen, dass jede solche vergleichende Thätigkeit den Längen- und Gleichheitsbegriff schon enthalte. Die Thatsachen, dass zwei Strecken, die einer dritten gleich sind, einander gleich sind, und dass von drei Strecken, von denen die zweite kleiner ist als die erste und die dritte kleiner als die zweite, auch die dritte kleiner sein muss als die erste, erscheinen dann auch im Grund als Erfahrungsthatsachen.

Die Thatsache, dass zwei Grössen, die einer und derselben dritten Grösse gleich sind, einander gleich sind, wird von Sigwart (Logik 2. Aufl. 1. Bd. 1889, S. 414) als ein analytischer, d. h. aus dem Begriff der Gleichheit folgender Satz bezeichnet. In gewissem Sinne wird dies jedermann zugeben, insofern die genannte Thatsache in unserem Bewusstsein mit dem Begriff „gleich“ scheinbar untrennbar associirt ist. Man darf aber nicht vergessen, dass diesem Satz, je nach der Anwendung, die wir von ihm machen, ein verschiedener anschaulicher oder, wenn man lieber will, empirischer Inhalt untergeschoben wird. Die Gleichheit von Strecken ist etwas Anderes als die Gleichheit von Winkeln oder gar die von Flächenstücken verschiedener Form. Eine Folge des sogenannten Princips der Identität scheint mir der erwähnte Satz auch nicht zu sein, weil Dinge, deren Gleichheit ausgesagt wird, sich stets in anderer Hinsicht unterscheiden, also nicht logisch identisch sind. Am Richtigsten werden wir wohl mit Helmholtz (vrgl. Wissenschaftliche Abhandlungen 3. Bd. 1895, S. 356 ff.: Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet, aus „Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet“,

1887; insbesondere vrgl. m. S. 375 u. 376) sagen, dass wir mit dem Wort „gleich" immer nur eine solche Relation von zwei Dingen bezeichnen, bei der stets aus dem Bestehen der Relation von a zu b auf das Bestehen derselben Relation von b zu a und aus dem gleichzeitigen Bestehen der Relation von a zu b und von b zu c auf das Bestehen der Relation von a zu c geschlossen werden darf. Ob aber eine Relation so beschaffen ist, das kann im vorgelegten Fall nur aus der Natur der Objecte, um die es sich handelt, hervorgehen.

Man kann überhaupt unter Umständen gleich gut sagen, dass eine Thatsache aus der Erfahrung abstrahirt sei, wie dass sie sich unmittelbar aus einem Begriff ergebe, indem dann der Begriff zusammen mit der Thatsache, die sich an ihn knüpft, der Erfahrung — oder Anschauung — entnommen wird. Niemals aber kann ein Streit darüber sein, ob eine Thatsache sich aus anderen im eigentlichen Sinn des Worts deduciren lässt oder nicht, d. h. ob eine schon gefundene derartige Deduction bindend ist oder nicht.

15) Vorträge und Reden, 2. Bd. p. 260 ff., wo auch ein überzeugendes Beispiel gegeben wird.

16) Das würde eine Induction sein, die auf gar keiner Deduction beruht. Ueber das Verhältniss von Deduction und Induction begegnet man scheinbar entgegengesetzten Ansichten. Die einen sagen, dass die Deduction immer inductiv gefundene Thatsachen zur Grundlage habe (Wundt, Logik 2. Bd. 1883, S. 27), die andern, dass die Induction auf den Ergebnissen der demonstrativen Logik, d. h. also auf der Deduction beruhe (Lotze, Logik 1874 S. 340, Sigwart, Logik 2. Bd. 1893 S. 384 u. 385). Beide Behauptungen lassen sich bis auf einen gewissen Grad vereinigen. Die erste Bemerkung, welche mir allerdings für die Arithmetik nicht zutreffend zu sein scheint, dürfte für alle die Wissenschaften richtig sein, die sich auf Gegenstände der Erfahrung im engern Sinne des Worts beziehen.

Sie ist hier richtig, insofern gewisse Thatsachen allgemeiner Art (Gesetze) inductiv aus der Erfahrung gewonnen sind, welche Thatsachen erst die Regeln liefern, nach denen dann die Deduction verfährt. Andrerseits giebt es complicirtere Inductionen, die erst möglich werden, nachdem man gewisse Begriffe gewonnen hat, die aus der deductiven Bearbeitung eines Wissensgebiets hervorgehen. Wenn wir z. B. aus vielen Beobachtungen induciren, dass bei einem fallenden Körper die vom Beginn des Falls durchlaufenen Räume sich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten, so müssen wir ausser einem allgemeinen Begriff des Vorgangs, den wir „Fallen" nennen, auch den Begriff der Quadratzahl schon besitzen, der aus dem deductiv bearbeiteten Gebiet der Arithmetik entspringt.

Dagegen scheint es mir, dass diejenige geistige Thätigkeit, die von Anfang an mit der Erfahrung Hand in Hand geht, indem wir Erfahrungsbegriffe bilden, eine vorbereitende ist und besser weder der Deduction noch der Induction zugewiesen wird.

17) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Bd. 1880, S. 46 ff.; H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, 1874, S. 88. Man vergleiche auch hierzu die interessanten Bemerkungen von Kant in der Vorrede zur 2. Ausgabe der Kritik der reinen Vernunft.

18) D. h. derjenigen, welche für unser Bewusstsein die einfachsten sind.

19) Ein Problem, dessen Lösung das Wesen unserer Raumanschauung in hohem Masse aufklären müsste, und zu dessen Lösung die Psychologie und die Physiologie erfordert werden, ist das Problem der Localisation. Diese Bedeutung des Localisationsproblems wird freilich nicht zugegeben werden von dem, der die reine Anschauung des Raumes als Bedingung jeder

Wahrnehmung ansieht. Aber auch ein solcher wird doch wohl zugestehen müssen, dass der empirische Theil meiner Wahrnehmung, d. h. also meine Sinnesempfindungen etwas enthalten müssen, was mich im einzelnen Fall veranlasst, einen Gegenstand so und nicht anders zu localisiren, d. h. ihn in dieser bestimmten Lage relativ zu meinem Körper zu schauen und nicht in einer andern (vrgl. die Theorie der „Localzeichen“ bei Lotze, System der Philosophie, 2. Theil, Metaphysik, 2. Aufl. 1884, S. 547 ff.). Ebenso muss ein empirischer Grund dafür vorhanden sein, dass ich in einem bestimmten Augenblick einen Gegenstand gerade in der Gestalt, in der er mir erscheint, und nicht in einer andern von jenen Gestalten schaue, die nach den Gesetzen der „reinen Anschauung“ möglich wären. Dieses Zugeständniss könnte man vielleicht schon als widersprechend ansehen mit der Auffassung von Kant, wornach die Form der Wahrnehmungen der von der Erfahrung unabhängigen Anschauung des Raumes entspringen soll. Man könnte wenigstens versucht sein, Kant so zu verstehen, dass die reine Anschauung, d. h. die Form der Wahrnehmung mit dem, was an der Wahrnehmung empirisch ist, gar nichts zu thun hat. Wenn aber, wie Kant sagt (K. d. r. V., 1. Ausg., Einleitung, I), die geometrischen „Erkenntnisse“ (Gesetze), die nach ihm ihren Ursprung a priori haben müssen, „vielleicht nur dazu dienen, um unsern Vorstellungen der Sinne Zusammenhang zu verschaffen“, so muss man ihn ohne Zweifel so verstehen, dass wir durch die Sinne im einzelnen Fall gewisse empirische Daten erhalten, aus denen wir, indem die Gesetze der Anschauung in uns wirken, die Gestalt des vor uns befindlichen Gegenstandes entwerfen und seine Lage bestimmen. Da aber die Beobachtung des Gegenstandes beliebig ausgedehnt werden kann, ist nicht abzusehen, dass wir jene empirischen Daten nicht sollten beliebig vermehren können, so dass wir auch mehr Daten erhalten können, als zur Be-

stimmung des Anschauungsbildes des Gegenstandes nöthig sind. Nun liefern aber alle diese empirischen Daten mit Hilfe der Gesetze der Anschauung das Bild des Gegenstandes übereinstimmend, was mir nur erklärlich scheint durch die Annahme, dass die Gesetze der Anschauung zugleich die Bedeutung haben, eine für den empirischen Theil der Wahrnehmung giltige Ordnung darzustellen. Damit wären wir im Grund wieder auf dem empiristischen Standpunkt angelangt.

20) Die Aufgabe, ein einfaches und vollständiges System von einander unabhängiger Axiome für die gewöhnliche Geometrie aufzustellen, ist neuerdings von Hilbert (a. a. O.) gelöst worden. Die von der gewöhnlichen, d. h. euklidischen Geometrie verschiedenen Geometrien haben von den Versuchen, das Parallelenaxiom Euklid's (es ist in der Heiberg'schen Ausgabe die 5. Forderung, in anderen Ausgaben das 11. Axiom) zu beweisen, ihren Ausgang genommen (m. vgl. F. Engel, Nicolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen mit einer Biographie des Verfassers, 1899, S. 373 bis 383). Zum Zweck eines solchen Beweises wurde zunächst versuchsweise angenommen, es sei das Parallelenaxiom nicht erfüllt, ursprünglich in der Absicht, aus dieser Annahme einen Widerspruch zu folgern; der Widerspruch ergab sich nicht, und es entwickelte sich aus diesen Betrachtungen die nichteuklidische Geometrie.

Lobatschefskij war der erste, der (1829) eine völlig ausgebildete, ohne das genannte Axiom aufgebaute Geometrie veröffentlichte (diese Geometrie, die auch Gauss entdeckt hat, ist von Verschiedenen unabhängig gefunden worden; näheres bei Engel a. a. O.). Lobatschefskij hat sich dabei der sogenannten synthetischen, d. h. der gewöhnlichen geometrischen Methode bedient. Man kann auch die „analytische“ Methode anwenden. Diese beruht auf der Möglichkeit, die sich auf Grund der gewöhnlichen Geometrie erweisen lässt,

die Lage eines Punktes im Raum durch drei Messungen festzulegen (diese Eigenschaft des Raumes wollen wir ausdrücken, wenn wir sagen, dass der Raum drei Dimensionen habe). Man kommt auf diese Weise dazu, der Gesammtheit der Punkte des Raumes die Gesammtheit der Zahlentripel zuzuordnen, was man auch in den Worten ausdrückt, der Raum lasse sich als dreifach unendliche Zahlenmannigfaltigkeit auffassen. Wenn man in dieser Weise den Raum auf eine Zahlenmannigfaltigkeit bezieht, so spiegeln sich die im Raum zwischen Punkten, Geraden, Ebenen bestehenden Lagenrelationen etc. als Relationen zwischen Zahlgebilden wieder, und es gelten hier wie dort dieselben Gesetze. Diese Auffassung eröffnet einen neuen Weg für die Beantwortung der Frage nach den möglichen Geometrien, einen Weg, der zuerst von Riemann (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abhandl. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 13; Mathematische Werke 1876, S. 254) eingeschlagen und später hauptsächlich von Helmholtz (Wissenschaftliche Abhandlungen 2. Bd., 1883, S. 610, S. 618; Vorträge und Reden 2. Bd., 1884, S. 3) weiter verfolgt worden ist. Diese Untersuchungen setzen im Grund voraus, dass sich die Verhältnisse des Raumes durch gewisse in einer Zahlenmannigfaltigkeit herrschende Verhältnisse exact darstellen lassen (diese Voraussetzung hat besonders Sophus Lie hervorgehoben, der zugleich die genannten Untersuchungen in verschiedenen Punkten richtig gestellt hat; m. vrgl. Theorie der Transformationsgruppen, dritter Abschnitt, unter Mitwirkung von F. Engel bearbeitet 1893, S. 393) und beschäftigen sich in Folge dessen nur mit den Gebilden der Zahlenmannigfaltigkeiten. Es hat sich dabei als Resultat ergeben, dass in anderen analogen dreifachen Zahlenmannigfaltigkeiten sich Gebilde definiren lassen, deren gegenseitige Relationen Gesetze zeigen, welche denen analog sind, in denen die gewöhnliche Geometrie sich widerspiegelt, und sich doch zu-

gleich von diesen unterscheiden, und dass einer der so gefundenen neuen Fälle der Geometrie Lobatschefskij's genau entspricht.

Durch diese Untersuchungen ist jedenfalls eines sicher dargethan, dass nämlich die Geometrie Lobatschefskij's in sich widerspruchslos ist, während die ursprüngliche, rein synthetische Behandlung dieser Geometrie zunächst die Möglichkeit noch offen gelassen hatte, dass neu hinzukommende Ueberlegungen später doch noch zu Widersprüchen hätten führen können. Wir brauchen uns jetzt nur für den Augenblick zu denken, dass wir mit den Worten „Punkt“, „Gerade“ u. s. f. gar nichts Anderes bezeichnen wollen als jene Zahlengebilde in der neuen Zahlenmannigfaltigkeit, dann sind die Axiome, die für das neue System postulirt wurden, erfüllt, somit können sie jedenfalls nicht unter einander in Widerspruch gerathen.

Man kann auch mit Hilfe gewisser complicirter Begriffsbildungen, die an die euklidische Geometrie angeknüpft werden, die Verhältnisse der Geometrie Lobatschefskij's abbilden (Beltrami, Saggio di interpretazione della Geometria noneuclidea, Giornale di Matematiche 1868, t. 6, p. 284; Klein, Mathematische Annalen 4. Bd. S. 573 ff., 6. Bd. S. 112 ff.; Cayley ebendaselbst 5. Bd. S. 630 ff.). Damit wird also unter der Voraussetzung, dass die euklidische Geometrie in sich widerspruchslos ist, die Widerspruchslosigkeit der neuen Geometrie dargethan. Die genannte Voraussetzung, die vor Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie ganz allgemein und stillschweigend gemacht wurde, beruht aber ursprünglich lediglich auf dem Glauben, dass die euklidische Geometrie der wahre Ausdruck sei für gewisse objective Verhältnisse. Natürlich kann man auch die Widerspruchslosigkeit der gewöhnlichen Geometrie durch den Hinweis auf die sie abbildende Zahlenmannigfaltigkeit darthun, wie das Hilbert (a. a. O. S. 19 bis 21) gethan hat.

Aus der Widerspruchslosigkeit der nichteuklidischen Geometrie, in der das Parallelenaxiom Euklid's nicht gilt, während die anderen Axiome bestehen, ergiebt sich, dass jenes Axiom nicht aus den anderen durch Schlüsse abgeleitet werden kann, und dieses Ergebniss ist vielleicht der hauptsächlichste Gewinn, den uns die Untersuchungen über die nichteuklidische Geometrie gebracht haben.

21) Man sucht die in der Parallelentheorie liegenden Schwierigkeiten manchmal dadurch zu umgehen, dass man gleich von Anfang an den Begriff „Richtung" einführt (vrgl. Zindler a. a. O. S. 7) und den Winkel als „Richtungsunterschied" definirt. In diesem Fall werden durch die Art, wie der Begriff der Richtung und der des Richtungsunterschieds gebraucht wird, gewisse Axiome gesetzt. Vor Allem wird bei dieser Auffassung die in Anm. 25 hervorgehobene Thatsache stillschweigend postulirt, dass zwei in einer Ebene liegende Gerade, die mit irgend einer sie schneidenden Geraden gleiche Winkel machen, mit jeder Geraden, welche sie schneidet, gleiche Winkel machen. Man pflegt aber im Zusammenhang mit der erwähnten Auffassung auch stillschweigend die Thatsache vorauszusetzen, dass Gerade, die in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, gleiche Richtung haben, d. h. mit einer dritten Geraden gleiche Winkel bilden; man setzt also doch noch das Parallelenaxiom voraus. Euklid aber hat gezeigt, dass mit Hilfe von Voraussetzungen, die sowieso noch gebraucht werden, aus der zweiten Thatsache die erste folgt. Nimmt man also die hier geschilderte Auffassung an, was gestattet werden kann, wenn die Axiome nicht stillschweigend angenommen werden (vrgl. die Bemerkungen bei Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 2. Bandes 1. Theil, 1891, S. 543 Anm.), so hat man sich nicht nur die nichteuklidische Geometrie abgeschnitten, sondern auch die euklidische auf eine grössere Zahl von Axiomen aufgebaut, als nöthig ist.

Mill hat vorgeschlagen (a. a. O. 2. Bd. S. 156), die euklidische Definition der parallelen Geraden zu ändern. Er will zwei Gerade a und b dann für parallel erklären, wenn sie überall denselben Abstand von einander haben. Da nun der Abstand der Parallelen durch eine auf beiden senkrechte Strecke gemessen wird, so verlangt Mill im Grund zwei Eigenschaften: es soll jede auf a senkrecht stehende Gerade auch auf b senkrecht stehen und umgekehrt, und es sollen die zwischen a und b fallenden Stücke aller dieser Senkrechten einander gleich sein. Nun besteht aber (in der gewöhnlichen ebenen Geometrie) noch die Thatsache, dass zwei Gerade parallel sind, wenn eine dritte Gerade auf beiden senkrecht steht, und diese Thatsache ist aus Mill's Definition nicht ableitbar; es müsste also diese Thatsache nun doch als axiomatisch angesehen werden. Aus dieser Thatsache und der Mill'schen Definition ergeben sich aber zwei Thatsachen, die beide auch ohne den Parallelenbegriff ausgedrückt werden können: 1. Wenn auf zwei Geraden a und b eine dritte Gerade senkrecht steht, so steht jede auf a senkrecht stehende Gerade auch auf b senkrecht; 2. es sind in dem angenommenen Fall alle die zwischen a und b liegenden Strecken, die auf a und b senkrecht stehen, einander gleich. Nun erscheint es zweckmässig, diese beiden Thatsachen voranzustellen und an sie dann die Erklärung der Parallelen zu knüpfen. Von den Thatsachen 1 und 2 folgt aber die zweite aus der ersten mit Hilfe derjenigen Axiome, die ausser dem Parallelenaxiom in der Geometrie Euklid's gebraucht werden. Ich zweifle nicht daran, dass Mill, wenn er den Sachverhalt gekannt hätte, die Zurückführung der Thatsache 2 auf die Thatsache 1 vorgenommen haben würde, denn er erkennt (2. Bd. S. 156 Anm. u. S. 146 Anm.) das Verfahren an, vermöge dessen wir gewisse Eigenschaften eines Begriffs auswählen, um seine anderen Eigenschaften daraus zu deduciren. Die Thatsache 1 bleibt axiomatisch.

Man mag also die Sache wenden, wie man will, die gewöhnliche Parallelentheorie muss, von unwesentlichen Modificationen abgesehen, so abgeleitet werden, wie Euklid es gethan hat. Es genügt nicht, eine Definition der Parallelen anzunehmen; man braucht noch ein Axiom. Nimmt man gar kein Parallelenaxiom an, so erhält man neben der gewöhnlichen Geometrie noch die nichteuklidische.

22) Man denke sich durch einen Punkt alle möglichen Strahlen — d. h. gerade Linien, die in dem Punkt beginnen und nach einer Seite sich ins Unendliche erstrecken — gezogen, und es sei g eine nicht durch den Punkt gehende Gerade, die auf beiden Seiten ins Unendliche verläuft. Es erfüllen dann alle diejenigen Strahlen, welche g schneiden, einen Winkel, dessen Schenkel die Gerade g nicht schneiden. Während nun die euklidische Geometrie darauf hinauskommt, diesen Winkel gleich zwei Rechten anzunehmen, nimmt ihn Lobatschefskij kleiner an als zwei Rechte (vrgl. auch Anm. 41). Es ist nun auch ersichtlich, dass die euklidische Geometrie ein Grenzfall der Lobatschefskij'schen ist. Die Thatsache, dass jene Strahlen überhaupt einen Winkel erfüllen, würde, wenn sie ohne Beweis eingeführt würde, auch die Annahme eines Axioms bedeuten. Lobatschefskij (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelen, 1840, 16. Satz, S. 7 ff.) giebt einen Beweis für diese Thatsache, der in der gegebenen Fassung nicht als völlig strenge angesehen werden kann. Doch ist kein Zweifel, dass die Thatsache sich aus einfacheren Axiomen, zu denen die Axiome der Anordnung (Anm. 32) und das Stetigkeitsaxiom (Anm. 49) gehören müssen, strenge beweisen lässt.

23) Sigwart, Logik 2. Bd. S. 275 u. 280.

24) Zindler, a. a. O. S. 33. Der im Text angeführte beweisbare Existentialsatz beruht unter anderen auf einem Axiom, das eine Existenz feststellt. Die geometrische Existenz ist selbstverständlich etwas von der physischen Existenz eines

Gegenstandes Verschiedenes, sie scheint mir aber doch durch das Wort „Existenz“ klarer ausgedrückt zu werden als durch das Wort „Möglichkeit“.

25) Auf die Einseitigkeit der gewöhnlichen „Syllogistik“ hat vor Allem Lotze hingewiesen (Logik 1874, S. 133); sie wird weder den verschiedenen Arten von Schlüssen gerecht, die in einer Wissenschaft, wie die Mathematik sie ist, gezogen werden, noch auch nur den verschiedenen Arten der hier vorkommenden Aussagen. Eine geometrische Aussage bezieht sich eigentlich stets auf Eigenschaften, welche mehrere geometrische Elemente (Punkte, Gerade etc.) relativ zu einander haben. Besser als vom Standpunkt der aristotelischen Figuren scheinen mir die mathematischen Schlüsse von dem Standpunkt aus aufgefasst werden zu können — wenn sie nun einmal rein formal dargestellt werden sollen — den die Engländer in ihrer „Logic of relativs“ einnehmen (m. vrgl. W. Stanley Jevons, The principles of science 1877, p. 122).

Auch das sogenannte Princip der Identität scheint mir die mathematischen Schlüsse nicht zu erklären. Man kann z. B. die Schlüsse, die aus den Parallelensätzen gezogen werden, in vielen Fällen folgendermassen auffassen. Aus den im Text genannten Parallelensätzen geht durch Zusammenfassung der Lehrsatz hervor, dass in der Ebene zwei Gerade, die mit irgend einer Geraden — in der früher angegebenen Weise — gleiche Winkel machen, mit jeder Geraden, welche sie schneidet, gleiche Winkel machen. Wir können also hier in einer gewissen Aussage für eine Gerade eine andere setzen. Der erwähnte Lehrsatz drückt also ein Substitutionsprincip aus, welches die Regel bildet, nach der gewisse Schlüsse verlaufen. Die Schlüsse aus diesem Substitutionsprincip sind aber nicht solchen analog, die aus dem logischen Princip der Identität gezogen werden können, weil nicht Identisches für Identisches, sondern Verschiedenes für Verschiedenes gesetzt wird.

26) Kroman, Unsere Naturerkenntniss, deutsch von Fischer-Benzon 1883, S. 26 u. 139.

27) Kant, Kritik der reinen Vernunft, 1. Ausgabe 1781, Elementarlehre II. Th., I. Abth., II. Buch, II. Hauptst. 3. Absch. Nr. 1: „Auf diese successive Synthesis der productiven Einbildungskraft, in der Erzeugung der Gestalten, gründet sich die Mathematik der Ausdehnung (Geometrie) mit ihren Axiomen“ etc. Vrgl. auch Elementarlehre I. Th. 1. Abschn. Nr. 4. Völlig deutlich geht übrigens aus den angeführten Stellen nicht hervor, ob Kant nur die Grundsätze aus der Anschauung entspringen lässt oder annimmt, dass diese auch bei jedem Schritt eines Beweises mitwirkt.

28) Sigwart, Logik 2. Bd. S. 82 Anm. sagt, dass die Massbeziehungen des Raumes „auf eine nicht weiter analysirbare Nothwendigkeit unserer Raumanschauung sich stützen“, wobei er unter den „Massbeziehungen des Raumes“ diejenigen Massbeziehungen versteht, die Euklid als Gesetze des Raumes angenommen hat.

29) Kroman a. a. O. S. 92 ff.

30) Kroman a. a. O. S. 74 bis 79. Auch Sigwart findet (Logik 2. Bd. S. 226), dass die Bewegung der Punkte und der Geraden im Raume bei allen Synthesen (Constructionen) wirksam sei und, wo er von der sich ins Unabsehbare erweiternden Mannigfaltigkeit der Constructionen spricht, sagt er (S. 227): „überall besteht aber dieselbe Forderung, den ganzen Umfang der durch eine Begriffsformel (es ist eine Vorschrift der Construction gemeint) gesetzten Möglichkeiten zu durchlaufen und daraus zugleich die Grenzfälle zu gewinnen und die Grenzen innerhalb des Umfangs behufs der Eintheilung zu ziehen.“

31) M. vrgl. die in Anm. 47 und 48 gegebenen Beispiele.

32) Welche von den Thatsachen der Anordnung man als Axiome annehmen will, um dann daraus die andern zu beweisen, ist bis auf einen gewissen Grad willkürlich. Man ver-

gleiche Pasch, Vorlesungen über Geometrie S. 5 bis 7, wo zuerst derartige Axiome aufgestellt sind, und Hilbert a. a. O. S. 6.

Hierher gehört auch eine Thatsache, welche vielfach als Axiom aufgefasst wird (vrgl. Klein, Mathematische Annalen 6. Bd. S. 113), die unendliche Länge der Geraden. Durch diese unendliche Länge unterscheidet sich die Gerade sehr wesentlich von dem Kreis, der in sich selbst zurückläuft und einen endlichen Umfang besitzt. Genau genommen muss die für die Gerade bestehende Thatsache folgendermassen ausgedrückt werden. Haben wir auf einer Geraden zwei Punkte A_0 und A_1, so können wir eine Reihe von Punkten $A_2, A_3, A_4, \ldots$ ohne Ende so construirt denken, dass A_1 zwischen A_0 und A_2, A_2 zwischen A_1 und A_3, A_3 zwischen A_2 und A_4 u. s. f., allgemein A_ν zwischen $A_{\nu-1}$ und $A_{\nu+1}$ liegt, dass ferner die Strecken A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots$ alle einander gleich sind, und es lässt sich dann allgemein für jeden Werth $2, 3, 4, \ldots$ der Zahl ν behaupten, dass weder A_ν noch ein zwischen $A_{\nu-1}$ und A_ν gelegener Punkt weder mit A_0 noch mit A_1 noch mit einem zwischen A_0 und A_1 gelegenen Punkt zusammenfallen kann. Der erste Theil dieser Behauptung, der die Möglichkeit jener Construction ausdrückt, folgt aus den Axiomen der Gleichheit (Anm. 48), der zweite Theil lässt sich aus den Axiomen der Anordnung beweisen, so wie diese von Pasch und Hilbert formulirt worden sind.

33) Auch Lobatschefskij setzt in seiner Geometrie die Thatsachen der Congruenz voraus. Ausser in dieser Geometrie bestehen die Thatsachen der Congruenz noch in einer zweiten von der euklidischen abweichenden Geometrie; man muss aber, um die letztere Geometrie zu erhalten, ausserdem dass man das Parallelenaxiom fallen lässt, auch noch die Axiome der Anordnung (Anm. 32; m. vrgl. auch Anm. 41) etwas verändern. Die bestimmten Thatsachen der Congruenz werden philosophischerseits manchmal in ziemlich unbestimmt formulirte

Eigenschaften des Raumes hineingelegt. So sagt Lotze (System der Philosophie, 2. Theil Metaphysik, 2. Aufl. 1884, S. 261), die gewöhnliche Auffassungsweise könne sich den Raum nur als gleichartig in seiner ganzen Ausdehnung denken; im Zusammenhang damit gebraucht er dann die Worte: „Der Raum selbst dagegen, als der unparteiische Schauplatz, der sich allen diesen Ereignissen darbietet, darf nicht locale Verschiedenheiten seiner eigenen Natur besitzen, welche verhinderten, dass Alles, was um den einen seiner Punkte herum besteht oder geschieht, sich an jedem andern ohne Veränderung wiederholen könnte.“

Merkwürdig ist, dass Mill in der Analyse, die er (a. a. O. 1. Bd. S. 242 ff.) von Nr. 5 des 1. Buchs von Euklid's Elementen giebt, nicht bemerkt, dass auch in seiner Darstellung der 1. Congruenzsatz (Nr. 4 des 1. Buchs bei Euklid) benutzt und nicht etwa durch eine Deduction ersetzt wird. Dies wird nur durch die unbestimmte Art, wie er sich an dieser Stelle ausdrückt, verschleiert. Er wendet den Grundsatz, dass gleiche Strecken sich decken, sofort in dem erweiterten Sinn an, dass ein Paar ungleicher Strecken sich mit einem andern Paar, dessen Strecken jenen Strecken einzeln gleich sind, decken muss. Dabei denkt er sich offenbar das eine Paar beweglich, aber die Strecken dieses Paars mit einander starr verbunden, so dass der zwischenliegende Winkel, der hier anfänglich mit dem Winkel der andern Strecken identisch war, sich bei der Bewegung gleich bleibt. Nun kann er, indem das bewegliche Paar mit dem andern zur Deckung gebracht wird, seinen Schluss ziehen; dabei muss man sich von gewissen Vorstellungen über die relative Lage leiten lassen, und diese Vorstellungen, die bei Mill unbemerkt mitwirken, sind eben der Anwendung des Congruenzsatzes völlig gleichwerthig.

34) Streng genommen braucht man, wie Hilbert a. a. O. S. 12 bis 14 gezeigt hat, nur einen Theil der Aussage des

Congruenzsatzes als axiomatisch anzunehmen, der übrige Theil lässt sich nachher beweisen. Der 2. Congruenzsatz, der besagt, dass zwei Dreiecke in allen Stücken übereinstimmen, wenn sie in einer Seite und in zwei Winkeln übereinstimmen, wird schon bei Euklid im eigentlichen Sinn des Worts bewiesen; es ist der Satz in Nr. 26 des 1. Buchs. Zu den Axiomen der Congruenz rechnet Hilbert auch gewisse Thatsachen, auf denen die Addition der Strecken und Winkel beruht, und die bei der gewöhnlich üblichen Art, die geometrischen Beweise zu führen, stillschweigend benutzt werden (vrgl. Anm. 48).

35) Es begegnet einem manchmal, und der meist viel zu formalistische erste Unterricht in der Algebra trägt einen Theil der Schuld daran, dass Leute mit den Regeln der Buchstabenrechnung fertig operiren und doch Schwierigkeiten empfinden, wenn sie vielleicht Zahlen in die Formeln einzusetzen haben. In einem solchen Fall fehlt die Erkenntniss dessen, was die algebraischen Symbole bedeuten. Sehr allgemein aber mangelt die Einsicht darein, weshalb die algebraischen Umwandlungen erlaubt sind. So haben die allgemeinen Formeln, auf denen die Umwandlungen beruhen, wie $a \cdot b = b \cdot a$ oder $a(b + c) = ab + ac$, einen im Grunde gar nicht selbstverständlichen Inhalt. Es sind das Lehrsätze, von denen der erste aussagt, dass ich im Ganzen gleich viele Gegenstände — sagen wir z. B. Kugeln — erhalte, wenn ich a Haufen von je b Kugeln bilde oder umgekehrt b Haufen von je a Kugeln. Dass wir solche Lehrsätze besitzen und aus ihnen schliessen, darin besteht die Algebra; die Buchstaben dienen dabei nur einer zweckmässigen Benennung, und die Form des Calcüls, die den Schlüssen gegeben wird, hat nur den Werth, die Uebersicht zu erleichtern. Jede Formel und jede Umwandlung von Formeln kann in Worten gedeutet werden, und es besteht kein grundsätzlicher Unterschied zwischen Aufgaben, die, wie man sagt, durch

„Raisonnement“ gelöst werden können, und solchen, bei denen die Lösung den Calcül nothwendig erforderte.

Man kann also das Verfahren der Buchstabenrechnung als ein Schliessen bezeichnen, bei dem Formeln wie $ab = ba$, $a(b + c) = ab + ac$ die Regeln bilden, nach denen geschlossen wird. Es ist dies wieder ein Schliessen, das der „Logic of relativs“ (Anm. 25) entspricht. Betrachtet man jene Regeln als die Axiome, so ist die Analogie mit der Geometrie vollkommen. Ein wesentlicher Unterschied gegen die Geometrie besteht aber darin, dass wir, indem wir vom algebraischen Formalismus auf den Zahlbegriff zurückgehen, beweisen können, dass $ab = ba$ ist, und zwar nicht bloss etwa dadurch, dass wir die vorliegende Formel an Beispielen bestätigen, wie sie vielleicht durch Induction ursprünglich gefunden sein mag, sondern durch ein deductives Verfahren (Anm. 58).

36) G. Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann 1888, deutsch von Schepp (Die Grundzüge des geometrischen Calcüls) 1891.

37) Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern hrsggb. von Gerhardt 1. Bd. 1899, S. 570.

38) Ebenda S. 575.

39) Man vrgl. hierzu Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik 2. Bd. 1869, S. 56 bis 63.

40) In dem angeführten Briefwechsel S. 577.

41) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien S. 13 bis 17. Ich setze voraus, dass zu den Axiomen Lobatschefskij's auch die Axiome der Anordnung (Anm. 32) gerechnet werden, die er stillschweigend benutzt, etwa in der Form, die ihnen Hilbert (Grundlagen der Geometrie S. 6 und 7) gegeben hat. Dann kann man strenge beweisen, dass die Winkelsumme des Dreiecks nicht grösser als zwei Rechte ist, und dass der in Anm. 22 vorkommende Winkel gleich oder kleiner sein muss als zwei Rechte.

42) Auch in der Arithmetik, die nach meiner Auffassung rein deductiv ist (Anm. 58), werden die Resultate oft zuerst auf inductivem Weg gefunden. Ein Beispiel dafür mag der zahlentheoretische Lehrsatz abgeben, dass eine Primzahl, die mit 4 dividirt den Rest 1 ergiebt, sich stets als Summe zweier Quadrate darstellen lässt. Dieser Lehrsatz ist von Fermat gefunden worden, ohne Zweifel auf inductivem Wege, und nachträglich erstmals von Euler bewiesen worden.

43) Es kommt ungefähr auf dasselbe heraus, wenn man (Zindler a. a. O. S. 5) sagt, dass die Geometrie von Anfang an nur relative Grössenverhältnisse in Betracht ziehe; denn diese Behauptung könnte nur durch die vorangegangene Erkenntniss des Aehnlichkeitsphänomens gerechtfertigt werden, das Euklid mit Recht aus den einfacheren Thatsachen der Gleichheit, Congruenz u. s. f. ableitet. Die beiden nichteuklidischen Geometrien kennen keine ähnlichen — und dabei nicht congruenten — Figuren, und es existirt in jeder dieser Geometrien eine Länge, der eine besondere Stellung allen andern Längen gegenüber zukommt, so wie dies auch bei Euklid bei den Winkeln mit dem rechten Winkel der Fall ist.

44) Man vrgl. die Bemerkungen von Helmholtz (Vorträge und Reden 2. Bd. S. 30) über die durch Beobachtung von Raumverhältnissen gewonnene anschauliche Kenntniss ihres typischen Verhaltens.

45) 6. Buch 1. Def., 4. bis 7. Satz.

46) Im 5. Buch.

47) Euklid spricht alle derartigen Axiome allgemein für irgend welche Grössen aus (1. Buch). Geometrisch betrachtet, haben diese Axiome verschiedenen Inhalt, je nach der Art der Grössen, auf die sie bezogen werden; ich will mich hier auf Strecken beschränken.

Der erwähnte Beweis erfordert noch die Eigenschaften der ganzen Zahlen, welche Eigenschaften übrigens (Anm. 58)



deducirt werden können, und einige Axiome, die jedermann geläufig sind; er lässt sich folgendermassen führen. Man denke sich zunächst eine Gerade g, auf der zwei Punkte A_0 und A_1 liegen. Es giebt nun auf g einen und nur einen Punkt A_2, für den A_1 zwischen A_0 und A_2 liegt, und für den gleichzeitig die Strecke $A_1 A_2$ einer gegebenen Strecke gleich ist; diese Thatsache ist als Axiom anzusehen (Hilbert a. a. O. S. 10). Wir wollen hier bestimmen, dass $A_1 A_2$ gleich $A_0 A_1$ sein soll, und dann auf g einen Punkt A_3 so annehmen, dass A_2 zwischen A_1 und A_3 liegt, und $A_2 A_3$ gleich $A_1 A_2$ und somit nach dem Vorigen und nach dem bekannten Axiom (Anm. 14) auch gleich $A_0 A_1$ ist. Dann nehmen wir A_4 so an, dass A_3 zwischen A_2 und A_4 liegt, und dass zugleich die Strecke $A_3 A_4$ den Strecken $A_2 A_3$, $A_1 A_2$ und $A_0 A_1$ gleich ist. Nun nehmen wir A_5 auf die entsprechende Weise an u. s. f. Es ist eine Folge der Axiome der Anordnung, dass z. B. A_2 nicht bloss, wie es nach Construction der Fall ist, zwischen A_1 und A_3, sondern auch zwischen A_0 und A_4 u. s. w. liegt. Da nun die Strecken zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten einander alle gleich sind, so folgt aus dem Axiom, dass Gleiches zu Gleichem addirt Gleiches giebt, welches Axiom hier nur für die Addition der Strecken ausgesprochen, und wo die Addition rein geometrisch durch Aneinanderfügen aufgefasst werden soll (Hilbert a. a. O. S. 11), auch die Gleichheit der Strecken $A_0 A_m$ und $A_m A_{2m}$, unter m irgend eine ganze Zahl verstanden. Man kann nun die Strecke $A_0 A_{nm}$, wenn n und m ganze Zahlen sind — in Folge der Definition der Streckenaddition und der Axiome der Anordnung — sowohl als Summe der Strecken $A_0 A_m$, $A_m A_{2m}$, $A_{2m} A_{3m}$ u. s. f., als auch als Summe aller der Strecken $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ... $A_{nm-1} A_{nm}$ ansehen, und es ergiebt sich hieraus, dass für die Strecke $A_0 A_1$, d. h. also für eine beliebige Strecke, der Lehrsatz gilt, dass ihr nm-faches gleich ist dem n-fachen ihres m-fachen.

Diese Betrachtung musste vorausgeschickt werden. Nimmt man jetzt an, es seien zwei Strecken AB und $A'B'$ gegeben, von denen die erste das m-fache, die zweite das m'-fache der Strecke CD sein soll, so folgt aus dem Vorangeschickten, dass das m'-fache von AB gleich dem m-fachen von $A'B'$ ist; denn das erste ist das $m'm$-fache, das zweite das mm'-fache von CD, und wir wissen, dass für Zahlen (Anm. 58) $m'm = mm'$ ist. Sind nun gleichzeitig AB und $A'B'$ auch gleich dem n-fachen, beziehungsweise n'-fachen einer und derselben Strecke EF, so ist auch das n'-fache von AB gleich dem n-fachen von $A'B'$. Es wäre nun zu zeigen, dass dasselbe Zahlverhältniss herauskommt, ob wir AB und $A'B'$ beide mittelst CD oder beide mittelst EF messen, d. h. es ist zu beweisen, dass $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$, d. h. dass $mn' = nm'$ ist.

Man bilde jetzt das nm'-fache von AB, so ist dies gleich dem n-fachen des m'-fachen von AB, d. h. gleich dem n-fachen des m-fachen von $A'B'$, also gleich dem nm-fachen, d. h. mn-fachen von $A'B'$. Dieses ist aber das m-fache vom n-fachen von $A'B'$, d. h. gleich dem m-fachen des n'-fachen von AB, also gleich dem mn'-fachen von AB. Wir sind nun zu dem Resultat gelangt, dass das nm'-fache von AB gleich dem mn'-fachen derselben Strecke ist. Daraus folgt, dass $mn' = nm'$ ist. Der strenge Beweis muss hierfür indirect geführt werden. Wäre z. B. $mn' > nm'$, so würde man das $(nm' + 1)$-fache, $(nm' + 2)$-fache u. s. f. der Strecke AB bilden. Das Axiom, dass Grösseres zu Grösserem addirt Grösseres giebt, in dem ich hier mit einbegreifen will, dass Etwas zum Grösseren oder Gleichen addirt Grösseres giebt, als wenn wir zum Kleineren oder Gleichen nichts addiren, erlaubt nun zu folgern, dass das $(nm' + 1)$-fache, $(nm' + 2)$-fache u. s. f. und schliesslich das mn'-fache von AB grösser sein müsste als das nm'-fache dieser Strecke, entgegen dem früher gefundenen Resultat.

In dieser etwas umständlichen Form der Beweisführung wird deutlich hervortreten, dass die geometrische Anschauung nirgends unmittelbar gebraucht worden ist, sondern überall nur mittelbar dadurch, dass jene wenigen völlig scharf präcisirbaren Axiome zur Anwendung gekommen sind.

48) Man kann bei den Strecken die von der Gleichheit geltenden Axiome so fassen (Hilbert a. a. O. S. 10 und 11), dass aus aus diesen Axiomen zusammen mit den Axiomen der Anordnung die Thatsache sich beweisen lässt, die auf die Addition des Grösseren zum Grösseren sich bezieht. Voraussetzung ist dabei natürlich, dass wir zuerst den Begriff „grösser“ auf die Begriffe „zwischen“ und „gleich“ zurückführen, indem wir definiren: Die Strecke AB ist grösser als CD, wenn es zwischen A und B auf der ersten Strecke einen Punkt E giebt, so dass AE gleich CD ist.

Die Schwierigkeit, die ein solcher Beweis dem mathematisch Nichtgeübten darbietet, beruht darin, dass man sich gewisser Vorstellungen künstlich entschlagen muss, die man in Folge einer langen Gewöhnung als selbstverständlich empfindet. Dass aber der Beweis sich doch in einwandfreier Weise führen lässt, mögen die folgenden Ausführungen zeigen.

Die von Hilbert für die Gleichheit der Strecken aufgestellten Axiome können folgendermassen ausgesprochen werden:

(1) Die Strecke AB ist stets gleich der Strecke BA (diesem Axiom entspricht die Thatsache, dass zwei Stäbe, deren einer die Enden A und B, und deren anderer die Enden A' und B' hat, wenn sie so zusammengelegt werden können, dass A' auf A, und B' auf B fällt, auch in umgekehrter Weise zur Deckung gebracht werden können, so dass A' auf B, und B' auf A zu liegen kommt).

(2) Wenn die Strecke AB der Strecke $A'B'$, und diese der Strecke $A''B''$ gleich ist, so ist auch $AB = A''B''$ (Anm. 14).

(3) Wenn A, B, C Punkte einer Geraden, und auch

A', B', C' Punkte einer Geraden sind, wenn ferner B zwischen A und C, und B' zwischen A' und C' gelegen ist, so folgt aus $AB = A'B'$ und $BC = B'C'$ zusammen stets $AC = A'C'$ (Axiom von der Addition des Gleichen zum Gleichen).

(4) Es sei ein Punkt A auf einer Geraden g und auf dieser Geraden noch ein zweiter Punkt B, ausserdem irgendwo eine Strecke CD gegeben; es giebt dann auf g einen und nur einen Punkt E von der doppelten Eigenschaft, dass die Strecke AE gleich CD ist, und E auf derselben Seite von A liegt wie B (d. h. so dass A nicht zwischen B und E liegt), und ebenso einen und nur einen Punkt E' von der doppelten Eigenschaft, dass $AE' = CD$ ist, und B und E' auf verschiedenen Seiten von A liegen (d. h. A zwischen B und E').

Nachdem nun die erwähnte Definition des Begriffs „grösser" gegeben ist, bemerke ich zuerst, dass die Aussage $AB >$ (grösser) CD, so wie der Begriff hier gefasst worden ist, die Aussage $AB = CD$ ausschliesst. Es soll nämlich nach jener Definition zwischen A und B ein Punkt E liegen (der also von A und B verschieden ist), für den $AE = CD$. Würde jetzt noch die Relation $AB = CD$ hinzukommen, so könnte man nach Axiom (2) schliessen, dass auch $AE = AB$; da aber E und B auf derselben Seite von A liegen, so müsste E mit B nach Axiom (4) zusammenfallen, entgegen dem Vorigen.

Wir nehmen nun $A'B' = AB$ und $AB > CD$ an und zeigen, dass hieraus $A'B' > CD$ folgt. Zu diesem Zweck nehmen wir E gerade so wie vorhin an; ausserdem soll auf der durch A' und B' gehenden Geraden g' ein Punkt E' so angenommen werden (Axiom (4)), dass $A'E' = CD$ ist, und E' auf derselben Seite von A' liegt wie B'. Nach den Axiomen der Anordnung kann nun E' nur entweder zwischen A' und B' fallen oder mit B' zusammenfallen oder so fallen, dass B' zwischen A' und E' liegt. Es muss bewiesen werden, dass

der erste Fall eintritt. Nun nehme man auf g' noch einen Punkt B'' so an, dass $E'B'' = EB$, und E' zwischen A' und B'' liegt. Es folgt nun aus $AE = CD = A'E'$ (vrgl. Axiom (2)) und aus $EB = E'B''$, dass nach Axiom (3) auch AB gleich $A'B''$ ist. Nun haben die Punkte B' und B'' dieselben Eigenschaften; es ist $AB = A'B'$, und $AB = A'B''$, und es liegen B' und B'' vermöge der Annahmen und der Axiome der Anordnung auf derselben Seite von A'. Deshalb müssen B' und B'' nach (4) zusammenfallen. Es liegt also E', das zwischen A' und B'' gelegen war, auch zwischen A' und B', womit nach Definition $A'B'$ grösser ist als das der Strecke $A'E'$ gleiche CD.

Ist $AB > CD$, so ergiebt sich mit Hilfe des Axioms (1) und des eben Bewiesenen, dass $BA > CD$ (dieses Resultat besagt, anschaulich ausgedrückt, dass, wenn die Strecke CD sich von der Strecke AB vom Ende A her abschneiden lässt, die Strecke CD von AB auch vom andern Ende her abgeschnitten werden kann, und es ergiebt sich aus der vorigen Betrachtung zugleich, dass bei diesem zweiten Abschneiden eine ebenso grosse Strecke übrig bleibt als beim ersten).

Nun möge angenommen werden, dass AB grösser als CD, und CD grösser als FG ist; es soll nachgewiesen werden, dass auch $AB > FG$ ist. Es existirt auf Grund der jetzt gemachten Annahmen zwischen A und B ein Punkt E, für den $AE = CD$. Da nun zugleich $CD > FG$, und also nach dem schon Bewiesenen auch $AE > FG$ ist, giebt es zwischen A und E einen Punkt H, für den $AH = FG$ ist. Die Axiome der Anordnung ergeben jetzt, dass H auch zwischen A und B gelegen ist, was in Verbindung mit der letzten Gleichung bedeutet, dass $AB > FG$ ist.

Jetzt ergiebt sich auch, dass, so wie wir die Begriffe in dieser Anmerkung gefasst haben, die Aussagen $AB > CD$ und $CD > AB$ sich ausschliessen; es würde nämlich aus beiden

Aussagen zusammen folgen, dass $AB > AB$, während die Begriffe „grösser“ und „gleich“ hier unvereinbar sind (s. o.).

Nach diesen Vorbereitungen kann der Beweis, um den es sich eigentlich handelt, geführt werden. Er lässt sich sofort auf folgende Anordnung zurückführen. Es liege B zwischen A und C, B' zwischen A und B und zugleich zwischen A und C'; wenn ausserdem $BC > B'C'$ ist, so soll bewiesen werden, dass C' zwischen A und C gelegen ist. Die Annahmen ergeben hier in Verbindung mit den Axiomen der Anordnung, dass C' und C auf derselben Seite von B' liegen; es kann also C' nur entweder zwischen B' und C oder auf C oder so fallen, dass C zwischen B' und C' gelegen ist. Im zweiten Fall ergiebt die Anordnung der Punkte in Verbindung mit der Definition des Begriffs „grösser“, dass $B'C' > BC$ (oder eigentlich zunächst $C'B' > CB$) ist, was aber im Widerspruch mit der ursprünglichen Annahme steht, dass $BC > B'C'$ sein sollte. Im dritten Fall findet man auf dieselbe Weise $B'C' > B'C$ und zugleich auch $B'C > BC$, weshalb nach dem früher Bewiesenen $B'C' > BC$ sein müsste, wiederum im Widerspruch mit der ursprünglich gemachten Voraussetzung. Es ist also nur der erste Fall möglich, d. h. es liegt C' zwischen B' und C und somit nach den Axiomen der Anordnung auch zwischen A und C, was zu beweisen war.

Ich habe der Einfachheit und Deutlichkeit wegen nur von Strecken gesprochen, wobei die für Punkte geltenden Axiome der Anordnung für die Beweise zur Verfügung standen. Euklid spricht die hierher gehörenden Thatsachen immer gleich allgemein für Grössen aus. In der That könnte man sich auch den Begriff einer Grösse oder eines Quantums als gegeben denken; es würde sich zeigen lassen, dass, falls wir von den Thatsachen, die wir unter diesem Begriff mitzudenken pflegen, gewisse fordern, wir die übrigen folgern können. Dies ist es, was Mill a. a. O. S. 146 und 147 Anm. anstrebt und bis auf



einen gewissen Grad auch ausführt. Er wird nur nicht aller der Voraussetzungen inne, die er thatsächlich benutzt; so nimmt er an, dass $(a - b) + c$, wenn man dazu b hinzufügt, $a + c$ ergiebt, d. h. er setzt voraus, dass $(a - b) + c = (a + c) - b$ ist. Mill spricht nun scheinbar bloss von Zahlen, und für Zahlen kann man auch die Voraussetzungen selbst beweisen (Anm. 58). Soll aber von irgend welchen Gegenständen deductiv gezeigt werden, dass sie zahlenmässig aufgefasst werden können, d. h. dass sie in Zahlverhältnissen zu einander stehen, so müssen gewisse Thatsachen vorausgesetzt werden, damit aus ihnen als aus Axiomen die anderen erforderlichen Thatsachen abgeleitet werden können.

Untersuchungen der hier bezeichneten Art haben auch die Bedeutung einer Vorbereitung für den Fall, dass ein physikalischer Zustand gemessen werden soll. Sie zeigen, welche Experimente hinreichen, um zu beweisen, dass der physikalische Zustand — z. B. die Ladung eines elektrisirten Körpers — quantitativ aufgefasst werden kann (m. vrgl. Maxwell, A Treatise on electricity and magnetism 1873, p. 35).

Es ist auch nützlich zu beachten, dass wir nicht überall da, wo wir Gradunterschiede bemerken, von Quantität im eigentlichen Sinne sprechen können. Wir können z. B. eine Härtescala construiren, indem wir bei zwei vorliegenden Körpern angeben können, ob sie gleich hart sind oder nicht, und im zweiten Fall, welcher der härtere ist. Wir können also auch unter drei Körpern einen angeben, der in der Härte zwischen den beiden andern steht, wir können aber nicht sagen, dass ein Körper doppelt so hart sei als ein anderer, oder dass zwei Körper zusammen so hart seien wie ein dritter. Wir können also die Härte nicht quantitativ auffassen.

49) Das archimedische Axiom kann bei Strecken aus den Axiomen der Anordnung und den Axiomen der Gleichheit bewiesen werden, wenn man noch das „Stetigkeitsaxiom“ hinzu-

nimmt. Diesem kann folgende Form gegeben werden. Wenn die zwischen A und B gelegenen Punkte auf irgend eine Weise in zwei Kategorien so vertheilt sind, dass jeder Punkt zu einer bestimmten Kategorie gehört, dass Punkte beider Kategorien vorhanden sind, dass ferner, falls X ein Punkt der ersten und Y ein Punkt der zweiten Kategorie ist, stets X zwischen A und Y liegt, so giebt es jedenfalls zwischen A und B einen Punkt C derart, dass zwischen A und C nur Punkte der ersten und zwischen C und B nur Punkte der zweiten Kategorie liegen. Es kann dabei C selbst, je nach dem vorliegenden Fall, zur einen oder andern Kategorie gehören (m. vrgl. die hiervon verschiedene Fassung des Axioms bei Hilbert, Mathematische Annalen Bd. 46, S. 92).

Das Stetigkeitsaxiom ergiebt noch eine Reihe anderer Folgerungen. Theilen wir z. B. die zwischen A und B gelegenen Punkte dadurch in zwei Kategorien ein, dass wir einen Punkt X der ersten Kategorie zutheilen, falls das Doppelte von AX kleiner ist als AB und einen Punkt Y immer dann der zweiten Kategorie zutheilen, wenn das Doppelte von AY grösser oder gleich AB ist, so lässt sich leicht nachweisen, dass für die beiden Kategorien die Eigenschaften bestehen, unter deren Voraussetzung das Stetigkeitsaxiom anwendbar ist. Dieses Axiom führt nun auf die Existenz eines Punktes C. Die Annahme, dass das Doppelte von AC kleiner als AB sei, lässt sich nun vermöge der schon erwähnten Sätze auf einen Widerspruch zurückführen, ebenso die Annahme, dass das Doppelte von AC grösser sei als AB. Es ergiebt sich dann hieraus, dass das Doppelte von AC genau gleich AB ist.

Damit ist also bewiesen, dass zu einer gegebenen Strecke eine andere vorhanden ist, welche die genaue Hälfte der ersten darstellt. Auf dieselbe Weise zeigt man die Existenz des Drittels, Viertels u. s. w., und man hat so eine ganze Reihe von Thatsachen auf ein einziges Axiom zurückgeführt.

50) Dabei sind selbstverständlich die „Axiome der Verknüpfung“ (Anm. 5) neben den Axiomen der Anordnung etc. mit vorausgesetzt.

51) 5. Buch, 5. Definition.

52) μ und ν sind ganze Zahlen, und ich bemerke hier noch einmal ausdrücklich, dass der Begriff der Vervielfachung einer Strecke den Begriff der Gleichheit, aber nicht den des Masses voraussetzt. Es ist z. B. AB gleich dem Dreifachen von CD, wenn zwischen A und B zwei Punkte M und N so existiren, dass M zwischen A und N, N zwischen M und B liegt, und $AM = MN = NB = CD$ ist.

53) Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 25: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, von Galileo Galilei (1638), übersetzt von Arthur v. Oettingen, fünfter Tag, S. 22 ff. Die verschiedenen von den Personen der „Discorsi“ als unmittelbar klar zugegebenen Thatsachen bedeuten die Annahme von ebenso vielen Axiomen.

54) Grundlagen der Geometrie S. 26 ff.

55) Das so begründete Längenmass führt darauf, in der gewöhnlichen Weise den Punkten einer Geraden die positiven und negativen Zahlgrössen zuzuordnen, wobei man die Punkte, denen die Zahlen 0 und 1 entsprechen sollen, willkürlich festsetzen kann. Die sogenannte „projective“ Geometrie führt auf eine andere Art, die positiven und negativen Zahlgrössen auf die Punkte einer Geraden zu vertheilen, wobei man die Punkte willkürlich festsetzen kann, denen drei bestimmte Zahlen entsprechen sollen. Wie man bei den mit der Länge zusammenhängenden Betrachtungen gleiche Strecken wiederholt aneinander ansetzt, so hat man bei dieser projectiven Betrachtung eine Operation mehrfach zu wiederholen, die bloss auf dem Verbinden von Punkten und dem Sichschneidenlassen von

Geraden beruht, ohne dass dabei jemals zwei Abstände gleich gemacht oder auf ihre Gleichheit verglichen würden. Man kann auf diese Weise eine Art von Mass in die Geometrie einführen, ohne dabei den Begriff der Länge oder auch nur den der Streckengleichheit zu benutzen (m. vrgl. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, zweites Heft 1857, S. 166 ff.; Klein, Mathematische Annalen 6. Bd. S. 112 ff.).

56) Man hat schon gesagt (Zindler a. a. O. S. 36 ff.), dass Euklid zu viel beweise, indem er manchmal aus den evidenten Thatsachen andere ableite, die gleichfalls evident seien. Dadurch aber, dass wir die Anschauung im eigentlichen Beweis selbst umgehen können, wird der Versuch von der grössten Wichtigkeit, die ganze Geometrie aus möglichst wenigen als axiomatisch angenommenen Anschauungsthatsachen — oder Erfahrungsthatsachen — zu deduciren. Alle Deductionen der bezeichneten Art sind für den Zusammenhang der Erkenntniss von Interesse und zwar auch dann, wenn wir von zwei Anschauungsthatsachen jede aus der andern mit Benutzung der ohnedies eingeführten Axiome beweisen können, wobei es dann freilich willkürlich ist, welche von jenen beiden Anschauungsthatsachen wir zu den Axiomen hinzurechnen wollen.

Darüber, was selbstevident ist, können ohnedies Meinungsverschiedenheiten bestehen; verschiedene Meinungen darüber, ob ein vorliegender Beweis bindend ist oder nicht, bestehen im Gebiet der Mathematik unter den Fachmännern in der Regel nicht.

57) Schur, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft 1892; Killing, Grundlagen der Geometrie, 2. Bd. 1898, Abschn. 5, § 5; Hilbert, Grundlagen der Geometrie, S. 40 ff.

Bei der im Text angedeuteten Auffassung der Inhaltslehre definiren wir also zunächst nicht den Inhalt, der gleichen Figuren

gemeinsam ist, sondern wir geben zuerst nur eine Erklärung von einer Thätigkeit, von deren Ausfall es abhängen soll, ob wir zwei Flächen (oder Körper) als „gleich“ oder verschieden bezeichnen wollen. Da die von uns gewählte Erklärung, wie man beweisen kann, so beschaffen ist, dass zwei Flächen, die beide einer dritten gleich erklärt werden mussten, auch einander gleich erklärt werden müssen, so erhalten wir, wenn alle die Flächen, die einer bestimmten gleich sind, zu einer Gesammtheit zusammengefasst werden, eine Gesammtheit von unter einander gleichen Flächen. Dieser Collectivbegriff ersetzt nun hier gewissermassen den Begriff des Inhalts. Ein solches Verfahren wird in der Mathematik häufig angewendet; übrigens können wir im vorliegenden Fall leicht zur Definition des Flächenmasses, also zum eigentlichen Inhaltsbegriff übergehen.

Der hier auseinandergesetzte Ansatz zur Inhaltslehre lässt sich gut mit Euklid's Lehre von den Proportionen vergleichen. Wie wir jetzt nicht definirt haben, was der Inhalt ist, sondern nur erklären, unter welchen Umständen zwei Flächen als gleich bezeichnet werden sollen, so hat Euklid nicht das Verhältniss von zwei Strecken als Zahl definirt, sondern nur angegeben, wann von zwei Strecken gesagt werden soll, dass sie sich zu einander gerade so wie zwei andere Strecken verhalten.

58) Arithmetische Begriffe können in der Deduction, auch der geometrischen, auf eine Weise gebraucht werden, auf welche innerhalb der Deduction die geometrischen Begriffe niemals gebraucht werden. Die geometrischen Begriffe Punkt, Strecke, Winkel u. s. f. werden im Beweis in der im Text schon geschilderten Weise rein „formal“ gehandhabt. Wir denken uns eine Mehrzahl geometrischer Elemente mit gewissen relativen Eigenschaften und können daraus neue relative Eigenschaften der Elemente ableiten, indem wir nicht im eigentlichen Sinn mit den geometrischen Begriffen, sondern

nur mit den sie verknüpfenden Axiomen herumoperiren. Hat man nun etwa für ein Viereck oder für ein Sechseck einen Lehrsatz zu beweisen, so wird man dabei durch ein vierfaches oder sechsfaches Wiederholen gewisser Gedankenoperationen zum Ziel kommen. Soll aber für das allgemeine n-Eck oder vielleicht für das allgemeine Vieleck, das eine gerade Seitenzahl besitzt, ein Lehrsatz bewiesen werden, so muss man sich jene Gedankenoperationen unbestimmt oft wiederholt denken. Dabei müssen an die Wiederholung jener Gedankenoperationen und an ihre Anordnung allgemeine Begriffe geknüpft werden. Diese allgemeinen Begriffe secundärer Art sind Zahlbegriffe oder combinatorische Begriffe, und von diesen Begriffen wird im Beweis nicht bloss „formal“, sondern „dem Inhalt nach“ Gebrauch gemacht.

Der Unterschied zwischen formaler und inhaltlicher Anwendung von Begriffen kann dadurch deutlich gemacht werden, dass man die Algebra — im gewöhnlichen Sinne des Worts — mit der Arithmetik vergleicht. Um z. B. zu zeigen, dass $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ ist, operirt man lediglich mit den algebraischen Symbolen nach ganz äusserlichen Regeln, zu denen auch die gehört, dass $ab = ba$ ist. Will man aber beweisen, dass der durch die Formel $ab = ba$ ausgedrückte Inhalt wahr ist, so muss man auf das Wesen des Zahlbegriffs und des Multiplicationsbegriffs zurückgehen. Wir müssen zeigen, dass wir ebensoviele Gegenstände, z. B. Kugeln, vor uns haben, wenn a Haufen von je b Kugeln vor uns liegen, als wenn b Haufen von je a Kugeln vorhanden sind. Der Beweis dafür ist bekanntlich folgender. Man denkt sich zuerst die a Haufen von b Kugeln. Nun nimmt man von jedem dieser Haufen eine Kugel fort, wobei a Haufen von $b - 1$ Kugeln übrig bleiben, und aus den fortgenommenen Kugeln, indem diese vereinigt werden, ein neuer Haufen von a Kugeln gebildet wird. Jetzt nimmt man von den a Haufen noch ein-

mal je eine Kugel weg, worauf man a Haufen von je $b - 2$ Kugeln und, zusammen mit dem schon vorhin gebildeten, 2 Haufen von je a Kugeln erhält. Indem man so fortfährt, werden schliesslich alle die a Haufen gleichzeitig erschöpft, und man hat dann dieselben Kugeln, die ursprünglich gegeben waren, in b Haufen von je a Kugeln geordnet.

Wir haben so den Beweis dafür, dass $ab = ba$ ist, erbracht, indem wir uns eine Umordnung der Kugeln vorgenommen gedacht haben. Worauf es im Grund beruht, dass wir allgemein die Möglichkeit dieser Umordnung einsehen, lässt sich schwer sagen; mitwirken mag der Umstand immerhin, dass wir solche Handlungen schon vorgenommen haben.

Der Begriff der Anzahl, auf dem die vorhergehende Betrachtung beruht, setzt im Grund, wie zuerst Schröder bemerkt (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 1873), und Helmholtz nachher besonders hervorgehoben hat (Wissenschaftliche Abhandlungen, 3. Bd., S. 358), eine gewisse Thatsache voraus, die ich aber (vrgl. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, 1. Theil 1885, S. 9 u. 10) für beweisbar halte.

v. Helmholtz hat nach dem Vorgang von H. Grassmann (Arithmetik, 1. Aufl. 1860, 2. Aufl. 1861) die einfachen von den Zahlen geltenden Lehrsätze von einer andern Seite her bewiesen (m. vrgl. auch Kronecker, in den Eduard Zeller gewidmeten „Philosophischen Aufsätzen" S. 263 ff.). Er benutzt dabei unter Anderem die Formel $ab = (a-1)b + b$, die er als ein „Axiom der Arithmetik" ansieht. Dieses (Grassmann'sche) Axiom ist aber — wie es Helmholtz in einem analogen Fall (in den genannten „Phil. Aufsätzen" S. 24 und Helmholtz, „Wissenschaftliche Abhandlungen" 3. Bd. S. 363) selbst ausdrückt — nur eine Beschreibung des Verfahrens der Multiplication. In der That kann man die Formel als die Definition der Multiplication auffassen, wobei die

Addition als bekannt vorausgesetzt wird. Nehmen wir nämlich an, es wisse jemand nicht, was a mal b ist, so könnten wir ihm sagen: 1 mal b ist b, 2 mal b ist 1 mal b vermehrt um b, 3 mal b ist 2 mal b vermehrt um b u. s. w., d. h. also es ist allgemein a mal b gleich $(a - 1)$ mal b vermehrt um b oder in einer Formel $ab = (a - 1)b + b$.

In derselben Weise ergiebt jedes Verfahren, das man unbegrenzt fortsetzen kann, einen allgemeinen Begriff und zugleich eine für diesen Begriff geltende Regel, deren Richtigkeit wir mit der Realität des Begriffs zugleich einsehen. Wir können z. B. 1 mit 2 multipliciren, das Resultat mit 3, das so erhaltene Resultat mit 4 u. s. f. Das Resultat, das wir nach der Multiplication mit a erhalten haben, wird dann mit $a!$ bezeichnet, und es besteht für diesen Begriff $a!$ die Regel, dass $a!$ gleich a mal $(a - 1)!$ ist. Weil nun solche Regeln nicht auf formale Weise bewiesen, sondern unmittelbar aus jenem Verfahren abstrahirt werden, um dann selbst die Grundlage für formale Deductionen zu bilden, mögen sie als Axiome erscheinen. Es ist aber klar, dass wir in der Arithmetik unendlich viele derartige Axiome erhalten würden, da jedes unbegrenzt fortsetzbare Verfahren ein solches Axiom liefert. Ich möchte deshalb die so sich ergebenden Formeln nicht als Axiome bezeichnen, zugleich noch aus einem andern Grunde. Wir führen in der Arithmetik häufig ein fortschreitendes oder ein combinatorisches Verfahren ein, um mit Hilfe der so sich ergebenden neuen Begriffe und Regeln gewisse verborgenere Eigenschaften der längst bekannten Begriffe zu finden oder, wenn sie etwa schon auf inductivem Weg gefunden sind, zu beweisen. So beweisen wir den in Anm. 42 angeführten zahlentheoretischen Lehrsatz mit Hilfe eines Verfahrens der „Reduction“ der sogenannten „quadratischen Formen“. Es bildet also in der Arithmetik das Abstrahiren neuer Allgemeinbegriffe und Regeln gewissermassen einen Bestandtheil der Deduction,

und das Verfahren, an dem wir hier abstrahiren, ist ein Vorgang, den wir nicht zur Erfahrung in der engeren Bedeutung des Worts, sofern sie nämlich ein Gegensatz zum Denken ist, rechnen.

In diesem Sinn möchte ich sagen, dass die Arithmetik — jedenfalls die Arithmetik der ganzen und rationalen Zahlen (hinsichtlich der rationalen Zahlen vrgl. m. Stolz a. a. O. S. 25 ff. und eine Besprechung des Verfassers in den Göttingischen gelehrten Anzeigen 1892, S. 592 ff.) — keine eigentlichen Axiome hat, und dass der arithmetische Beweisgang nicht ein rein formaler, sondern ein gemischter und äusserst verwickelter Process ist.

59) Die Exhaustionsmethode, welche meist auf Archimedes zurückgeführt wird, findet sich auch schon bei Euklid angewendet, an der Stelle, wo er beweist, dass zwei Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Radien verhalten (12. Buch, Nr. 2).

60) Man stellt die Inhaltsbestimmung der Kreisfläche auch folgendermassen dar. Man sagt, dass der Kreis als ein regelmässiges Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten angesehen werden, und dass man ein solches Vieleck, durch Verbinden der Ecken mit dem Mittelpunkt, in unendlich viele unendlich schmale Dreiecke zerlegen könne; durch Zusammennehmen dieser Dreiecke, welche den Kreisradius zu ihrer gemeinsamen Höhe haben, ergiebt sich dann der Lehrsatz des Textes. Ein solches Schlussverfahren wird auch als „Methode des Unendlichen“ bezeichnet.

Im Grund sind die bei der sogenannten Methode des Unendlichen benutzten Vorstellungen lediglich als abkürzende Hilfsvorstellungen anzusehen. Einen genauen Sinn bekommen alle derartigen Betrachtungen erst dadurch, dass wir sie, so wie es im Text geschehen ist, im Sinn der Exhaustionsmethode (d. h. der Methode der Einschliessung in immer engere Grenzen) deuten. Dadurch werden diese Betrachtungen

völlig strenge, und es ist nun ersichtlich, dass die Methode des Unendlichen in der Mathematik kein neues (transcendentes) Princip enthält. Auch ist die Vermeidung des indirecten Verfahrens bei der Methode des Unendlichen nur scheinbar.

61) Es giebt eine ganze Reihe von mathematischen Beweisen, die man bis jetzt nicht hat auf directem Wege führen können und von denen man vielleicht zu zeigen vermöchte, dass sie nur auf indirectem (apagogischem) Wege möglich sind. So ist in dem Beispiel des Textes der Schluss auf die genaue Gleichheit nur durch diejenige Wendung des Gedankens möglich geworden, die zugleich den Beweis zu einem indirecten gemacht hat. Es erscheint mir deshalb ungerechtfertigt, wenn Manche den indirecten Beweis bemängeln. Das Fundament dieser Beweisform ist der Grundsatz, dass von einer Annahme, aus der sich folgerichtig Widersprüche entwickeln lassen, das Gegentheil wahr sein muss. Dieser Grundsatz stellt eine sehr nützliche Form des Satzes vom Widerspruch dar, während das sogenannte Princip der Identität, das angeblich den Satz des Widerspruchs in sich schliessen soll, durchaus unfruchtbar ist.

62) Zu diesen Beweisen der Mechanik möchte ich auch den archimedischen Beweis für das Hebelgesetz rechnen. In diesem Punkt stimme ich mit den Ausführungen, die Mach in seinem ausgezeichneten Werke „Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt“ (1883) gegeben hat, nicht überein. Mach ist der Ansicht, dass bei Archimedes überall schon vorausgesetzt sei, dass für die Wirkung eines Gewichts am Hebel das Product aus den Grössen des Gewichts und des Hebelarms massgebend sei. Dies ist nicht der Fall. Archimedes (Archimedis Opera Omnia recens. J. L. Heiberg 1881, volumen II, p. 142) setzt allerdings voraus, dass kein Gleichgewicht vorhanden ist, wenn gleiche Gewichte an verschieden langen Hebelarmen wirken, und dass

ein vorhandenes Gleichgewicht gestört wird, wenn man eines der Gewichte vergrössert; darin liegt, dass einerseits der Hebelarm, andererseits das Gewicht selbst massgebend ist, aber nicht etwa, dass ein vorhandenes Gleichgewicht bestehen bleibt, wenn wir z. B. eines der Gewichte verdreifachen und gleichzeitig seinen Aufhängepunkt so verändern, dass der Hebelarm auf ein Drittel reducirt wird.

Ausser den Annahmen, die Archimedes präcise angiebt, macht er noch von einer Voraussetzung Gebrauch. Er nimmt an (der scheinbare Gebrauch, den er vom Schwerpunkt macht, kommt lediglich hierauf hinaus, und dies scheint Mach ebenso anzusehen), dass zwei an verschiedenen Punkten aufgehängte gleiche Gewichte, gleichviel mit wie vielen anderen sie noch zusammen sind, durch eines ersetzt werden dürfen, das doppelt so gross ist als eines von jenen beiden und dessen Aufhängepunkt zwischen den Aufhängepunkten jener in der Mitte liegt. Archimedes setzt ausserdem noch voraus, dass die umgekehrte Substitution stets erlaubt ist. Diese Voraussetzungen können einerseits durch die Betrachtung motivirt gedacht werden, dass gleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen im Gleichgewicht sind und den Aufhängepunkt gerade so belasten, als ob sie beide unter ihm angebracht wären; andererseits durch die Annahme, dass die hier beobachtete Gleichwerthigkeit auch unter andern Umständen besteht, und man kann diese letzte Annahme auf die folgende reduciren: ein System von Kräften, die einen starren Körper angreifen, ist im Gleichgewicht, wenn ein Theil der Kräfte, für sich betrachtet, im Gleichgewicht ist, und von dem andern Theil dasselbe gilt. Dies ist ein — natürlich durch die Erfahrung motivirtes — Postulat (eine axiomatische Annahme). Man kann sagen, dass diese Annahme eine ganz allgemeine Idee davon enthalte, dass man Wirkungen von Kräften zusammensetzen kann, und man könnte in Folge dessen in der Annahme das physikalische Princip der „Super-

position“ finden wollen (über Superposition vrgl. m. Volkmann, Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg, 1894, S. [21] u. Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften 1896, S. 69 ff.). Es besteht aber der wesentliche Unterschied, dass die Anwendung des Princips der Superposition noch ein besonderes metrisches Gesetz voraussetzt, nach dem für zwei beliebige Kräfte die Wirkungen zusammengesetzt werden können. Die hier gemachte Annahme ist einfacher.

Mag man nun an sich von den Voraussetzungen von Archimedes halten, was man will, so kann doch nicht geläugnet werden, dass man in ihnen nicht unmittelbar, d. h. durch blosse Anstrengung der Urtheilskraft, das Hebelgesetz erkennen kann, während dieses metrische Gesetz sich doch aus ihnen vermöge eines mathematischen Beweisverfahrens mit Nothwendigkeit ergiebt. Solche Beweise (Deductionen) sind immer werthvoll für die genauere Erkenntniss des wissenschaftlichen Zusammenhangs; sie sind es selbst dann, wenn das zu Deducirende vorher inductiv entdeckt worden ist, was wir übrigens beim Hebelgesetz nicht behaupten können, da wir über die Geschichte seiner Entdeckung nichts wissen. Es müssen ohnedies genauere und zahlreiche Messungen vorausgehen, wenn man das ganze Hebelgesetz unmittelbar inductiv begründen will, während schon die Erfahrungen des täglichen Lebens dazu führen können, die archimedischen Annahmen zu postuliren, wodurch sich diese als die einfacheren Grundlagen empfehlen.

Diese Grundlagen sind freilich schliesslich inductiv; dies hindert aber nicht ihre deductive Verwendung, wie wir ja auch in der Physik experimentell gefundene Naturgesetze deductiv verwenden können. Die wahre Methode der mathematischen Physik besteht in einer Verbindung inductiven und deductiven Verfahrens (m. vrgl. Wundt, Logik 2. Bd. 1883, S. 66).

63) Vrgl. Philosophiae naturalis principia mathematica.

64) Es ist von dem grössten Interesse, dass die mechanischen Begriffe, die doch ziemlich allgemein als aus der Erfahrung abgezogen angesehen werden, in ihrem wissenschaftlichen Gebrauch eine ebensolche ideale Vollkommenheit zeigen wie die geometrischen Begriffe. Bei diesen ist der erwähnte Umstand gar oft zu Gunsten einer philosophischen Lehre, namentlich auch zu Gunsten der Kant'schen Auffassung vom Raum ausgebeutet worden. Man pflegt dann zu sagen, dass die Gegenstände der Erfahrung uns die geometrischen Begriffe nie vollkommen darstellen, da ja in der Erfahrung z. B. nie Punkte, sondern statt deren kleine Körper vorliegen, während die Begriffe und Lehrsätze der Geometrie für die vollkommenen Objecte der uns innewohnenden Anschauung genau giltig seien, also im Grund sich auf die Anschauung und nicht auf die Erfahrung beziehen.

Dem gegenüber muss ich bemerken, dass ich der Anschauung gleichfalls keine Vollkommenheit und keine genaue Uebereinstimmung mit der Geometrie zuschreiben kann, wenn diese Anschauung nicht etwa bloss postulirt werden, sondern etwas sein soll, das wir thatsächlich an uns beobachten. Thatsächlich kennen wir bloss das Vermögen unserer Phantasie, Bilder räumlicher Gegenstände, annähernd mit derselben Lebhaftigkeit, als ob wir sie vor uns sehen würden, uns vorzustellen. Ich kann aber nicht behaupten, dass ich mir zwei völlig gleiche Strecken vorstellen kann. Wohl kann ich mir aber zwei annähernd gleiche Bilder von Strecken vormalen und dabei festsetzen, dass ich sie als gleich ansehen will, d. h. ich kann sie als gleich denken. Ebenso wenig kann ich behaupten, dass ich eine Gerade als eine unendlich ausgedehnte mir mit sinnlicher Lebhaftigkeit vorstelle. Ich stelle mir eher eine begrenzte Gerade vor, an die ein Stück angesetzt worden ist, und der Gedanke, dass ich an die Gerade dasselbe Stück

wieder und immer wieder ansetzen kann, macht, dass ich sie als unendlich denke. Ebenso entsteht in der Mechanik der Gedanke an einen „materiellen Punkt“ durch die Vorstellung eines Körpers, dessen Masse in Betracht zu ziehen ist, während zugleich seine Ausdehnung so gering ist oder etwa durch Zusammendrücken so gering gemacht werden kann, dass sie nicht mehr in Betracht kommt.

Wie also die mechanischen Begriffe Abstractionen sind, welche die Erfahrung zur Grundlage haben, so dürften auch die geometrischen Begriffe durch Abstraction, sei es nun aus der Erfahrung oder der Anschauung zu Stande kommen, und geometrische und mechanische Begriffe unterscheiden sich so äusserst wenig von gewöhnlichen Erfahrungsbegriffen.

Nun kommt aber noch etwas hinzu. Nachdem wir auf Grund der Beobachtungen zu Gesetzen gekommen sind, welche die geometrischen Begriffe verknüpfen, verschmelzen diese Gesetze in unserem Bewusstsein mit den Begriffen, und es entsteht daraus das Bestreben, an diesen Gesetzen auch bei künftigen Erfahrungen festzuhalten; dadurch wird aber dann auch die Anwendung der Begriffe im Einzelnen beeinflusst. Das ist aber in der Mechanik gerade so. Es ist schon oft bemerkt und gegen die Annahme eines empirischen Ursprungs der Geometrie geltend gemacht worden, dass wir in der Regel die Erfahrung durch die Geometrie berichtigen und nicht umgekehrt. Dass wir die Erfahrung häufig durch die Geometrie berichtigen, ist wahr. Wenn wir ein Lineal auf einen Tisch legen, und es nicht nach allen Richtungen auf den Tisch passt, so werden wir annehmen, dass der Tisch nicht genau eben ist, und nicht etwa, dass die von Geraden und Ebenen geltenden Sätze unrichtig sind. Ich glaube aber, dass dies nichts gegen den empirischen Ursprung der Geometrie beweist. Wir verfahren in der Mechanik gerade so; wenn z. B. ein Komet eine auf andere Weise nicht erklärbare Verlangsamung

seiner Bewegung zeigt, so nehmen wir dem Trägheitsgesetz zu liebe an, dass der Raum durch etwas ausgefüllt sei, was dem Kometen gegenüber als widerstrebendes Mittel wirkt.

Wir können uns die Sache folgendermassen denken. Die Grundbegriffe der Geometrie und Mechanik und die einfachsten Gesetze dieser Wissenschaften sind an der Erfahrung abstrahirt, bei der Geometrie wahrscheinlich an ziemlich rohen Erfahrungen. Erst nachdem die durch Beobachtung gewonnenen Gesetze sich im Ganzen bestätigt und in der Anwendung als nützlich erwiesen hatten, versuchte man sie für genaue Punkte und Gerade, für Massen, die zugleich genaue Punkte sind, für vollkommen constante Kräfte u. s. f. als genau giltig zu postuliren. Mit diesen Postulaten erheben wir uns also zu unbegrenzter Genauigkeit (vrgl. Volkmann, Schriften d. phys.-ök. Ges., 1894, S. [17]).

Die zusammengehörigen Begriffe der geometrischen Elemente, Punkt, Gerade u. s. f., machen nun zusammen mit den Relationen, welche zwischen den Elementen bestehen können (ein Punkt kann z. B. auf einer Geraden liegen), und mit den Gesetzen (Axiomen), die wir postulirt haben, und die uns erlauben, von dem Bestehen gewisser Relationen auf das Bestehen anderer zu schliessen, ein völlig ausgearbeitetes begriffliches Bild von der wirklichen und scheinbaren Ordnung der Dinge aus, welche „Raum“ genannt wird (der so gewonnene Begriff des Raumes ist ein Begriff höherer Ordnung, der eine logische Gliederung zeigt, und aus dem Folgerungen gezogen werden können, m. vrgl. Volkelt, Erfahrung und Denken S. 384). Da wir aber, wie wir jetzt wissen, aus verschiedenartigen Annahmen verschiedene in sich folgerichtige Systeme der Geometrie herausentwickeln können, so lässt sich auch der Begriff vom Raum auf verschiedene Arten formuliren. Den älteren Philosophen, welche sich mit dem Wesen des Raumes und der Geometrie beschäftigt haben, hat nun allen,

wie mir scheint, der euklidische Begriff vom Raum vorgeschwebt, und ihre Ansichten vom Raum unterscheiden sich nur durch das Verhältniss, in dem sie sich jenen Begriff zur Welt des Wirklichen denken. Man kann verstehen, dass die einen diesem so folgerichtigen Begriff der Wirklichkeit gegenüber eine höhere Wahrheit zuerkennen wollten, während ihn Kant für subjectiv erklärte, wobei er zugleich annahm, dass jener Begriff mit der Anschauung ein und dasselbe, und dass diese „reine“ Anschauung die Form sei, in der uns die Dinge in Folge unserer geistigen Organisation erscheinen müssen.

Bedenkt man, dass wir einen Begriff von ähnlicher Folgerichtigkeit von der Bewegung der Körper und dem Spiel der sie regierenden Kräfte haben, der wahrscheinlich auf empirischer Grundlage ruht, so wird man eher geneigt sein, zu glauben, dass auch der Begriff vom Raum an der Hand der Erfahrung gebildet worden ist. Es erscheint dann nicht widersprechend, dass wir zwar in einzelnen Fällen diesen Begriff benutzen, um Erfahrungen zu deuten, aber doch andererseits es für möglich halten, diesen Begriff, dessen Angemessenheit hypothetisch ist, auf seine Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu prüfen, um ihn, falls es nöthig werden sollte, umzubilden, wie wir dies auch mit physikalischen Begriffen thun (für das physikalische Erkenntnissgebiet wird ja das Verfahren der versuchsweisen Begriffsbildung und der Umbildung im Fall der Nichtbestätigung allgemein zugegeben, m. vrgl. z. B. Sigwart, Logik, 2. Bd. S. 242). Die Ungenauigkeit, welche im Sinne der Geometrie den Erfahrungsobjecten zukommt, bildet für die Prüfung kein unbedingtes Hinderniss. Aus der Geometrie Euklid's lassen sich auch Folgerungen für ausgedehnte Körper, also auch für Punkte, Gerade u. s. f. ziehen, die keine genauen Punkte und Gerade sind, weshalb wir prüfen können, ob die an solchen ungenauen Objecten gemachten Erfahrungen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen mit

den Folgerungen aus den Axiomen übereinstimmen. Wir prüfen ebenso die mechanischen Postulate genauer in einer nur mittelbaren Weise.

Die Uebereinstimmung der euklidischen Geometrie mit der Erfahrung ist bis jetzt stets vorhanden gewesen, diese Geometrie ist unzählige Male bestätigt worden, denn fast jede ihrer Anwendungen ist eine solche Bestätigung. Wir haben also, jedenfalls für die Anwendungen, gar keinen Grund von der Geometrie Euklid's abzugehen. Riemann hat die Vermuthung ausgesprochen (Gesammelte mathematische Werke 1876, S. 268), dass möglicherweise künftig Thatsachen gefunden werden könnten, welche uns zu einem solchen Abgehen bestimmen, und schon Lobatschefskij hat gedacht, dass astronomische Messungen dafür einen Grund abgeben könnten.

Derartige Aeusserungen haben philosophischerseits starke Ablehnung erfahren (m. vrgl. Lotze, System der Philosophie, 2. Theil, Metaphysik, 2. Aufl., S. 248; Sigwart a. a. O. S. 82). Es ist kein Zweifel, dass ein in den astronomischen Messungen und Berechnungen auftretender Widerspruch auf sehr verschiedene Arten gedeutet werden könnte. Wir könnten den Lichtstrahl, der in das Fernrohr des Beobachters eingemündet ist, als nicht völlig geradlinig annehmen; denn wir könnten selbst dann, wenn ursprünglich der Begriff der Geraden an der Sehlinie abstrahirt worden ist, doch nachträglich den Begriff der genauen Geraden an die euklidischen Axiome knüpfen und nun Gerade und Sehlinie unterscheiden. Da aber die astronomischen Messungen, die man im Auge hat, zu verschiedenen Zeiten vor sich gehen müssten, und die Himmelskörper sich in der Zwischenzeit bewegen, so könnte der Fehler auch dadurch corrigirt werden, dass wir für die Bewegung der Himmelskörper andere Gesetze annehmen. Wollten wir also in dem gedachten Fall alle Möglichkeiten erwägen, so müssten wir das ganze physikalisch-geometrische Begriffssystem, soweit

es sich mit der Astronomie berührt, versuchsweise umbilden (von diesem Gesichtspunkte kann man die Arbeit von Lipschitz betrachten, der für den Fall der nichteuklidischen Geometrie eine Mechanik aufgestellt hat; m. vrgl. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 74. Bd. S. 116). Gewiss ist es äusserst unwahrscheinlich, dass schliesslich die Geometrie von der Umbildung betroffen werden würde; als absolut unmöglich kann dies aber doch nicht bezeichnet werden.

65) Darauf scheint mir in vielen Fällen die Empfindung zu beruhen, die bewirkt, dass wir etwas für evident erklären.

66) Die Unmöglichkeit, die mechanischen Grundbegriffe im eigentlichen Sinn des Worts, d. h. constructiv, zu definiren, hat auch schon dazu geführt, auf eine Erklärung dieser Begriffe ganz zu verzichten, wie dies G. Kirchhoff (Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, 2. Aufl. 1877) gethan hat. Er hat zugleich die Aufgabe der Mechanik dahin bestimmt, dass sie die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise beschreiben soll. Die Beschreibung, die er im Auge hat, geschieht durch Gleichungen; die Grössen der Kräfte und Massen sind ihm nichts Anderes als gewisse in diesen Gleichungen auftretende Zahlcoefficienten (vrgl. S. 5 und S. 12). Bei dieser Auffassung wird man dem physikalischen Inhalt der mechanischen Begriffe nicht gerecht, und es erscheint z. B. ganz unerklärlich, weshalb diejenigen Zahlcoefficienten, die als Massen bezeichnet werden, von der Zeit unabhängig sind. Das Kirchhoff'sche Wort, dass die Mechanik bloss beschreibt, ist im Uebermass nachgesprochen worden. In gewissem Sinn ist freilich jedes Erklären ein Beschreiben, aber doch zugleich von dem rein äusserlichen Beschreiben grundverschieden, und es dürfte sich wohl lohnen, dafür das unterscheidende Wort beizubehalten. Paul Du Bois-Reymond sagt (Ueber die Grundlagen der Erkenntniss in den exacten Wissenschaften 1890, S. 14): „Die

Herleitung eines mannigfaltigen Erscheinungsgebiets aus den einfachsten Elementen des Erscheinens ist keine Beschreibung. Hier sagt man, wie mir scheint, zutreffender: die Synthese oder die Construction oder der Aufbau des Erscheinungsgebiets aus einfachsten Mechanismen."

67) Die Aehnlichkeit, die zwischen geometrischen und mechanischen Begriffen und zwischen geometrischer und mechanischer Deduction besteht, spricht, wie schon bemerkt wurde, für den empirischen Ursprung der Geometrie, es sei denn, dass man auch gewisse Begriffe der Mechanik als „apriorisch", d. h. als von der Erfahrung unabhängig ansehen will. Diese Auffassung scheint Kant da gehabt zu haben, wo er von „reiner" Naturwissenschaft spricht. So rechnet er (Kr. d. r. V. 1. Aufl., Elementarlehre II. Th., I. Abth., II. Buch, II. Hauptst. 3. Absch. Nr. 3, A) den Satz, dass die Substanz beharrlich sei, zu den „reinen und völlig a priori bestehenden Gesetzen der Natur". Was Kant in diesen Satz von der Beharrung mit hineingelegt haben wollte, zeigt ein von ihm an der betreffenden Stelle benutztes Beispiel: „Ein Philosoph wurde gefragt: wieviel wiegt der Rauch? Er antwortete: ziehe von dem Gewichte des verbrannten Holzes das Gewicht der übrigbleibenden Asche ab, so hast du das Gewicht des Rauchs. Er setzte also als unwidersprechlich voraus: dass, selbst im Feuer, die Materie (Substanz) nicht vergehe, sondern nur die Form derselben eine Abänderung erleide." Kant will also in jenen Satz von der Beharrung das genaue Gesetz von der Erhaltung der Materie mit einbezogen wissen. Anderen mechanischen Begriffen gegenüber verhält er sich aber anders, wie er z. B. die Bewegung als einen empirischen Begriff bezeichnet (Elementarlehre II. Th., I. Ath., I. Buch, I. Hauptst. 3. Absch.).

Ausserdem, dass eine Aehnlichkeit zwischen geometrischer und mechanischer Begriffsbildung besteht, kann man auch einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen diesen beiden Arten von

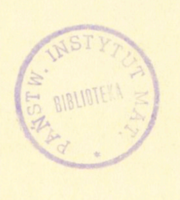
Begriffen finden. So nimmt Helmholtz an (Anm. 14), dass der geometrische Begriff der Congruenz einen physikalischen Begriff, etwa den des starren Körpers, voraussetzt, und Benno Erdmann betrachtet dies in seinen „Axiomen der Geometrie“ (S. 91, 147, 148) als einen Beweis für die empiristische Ansicht.

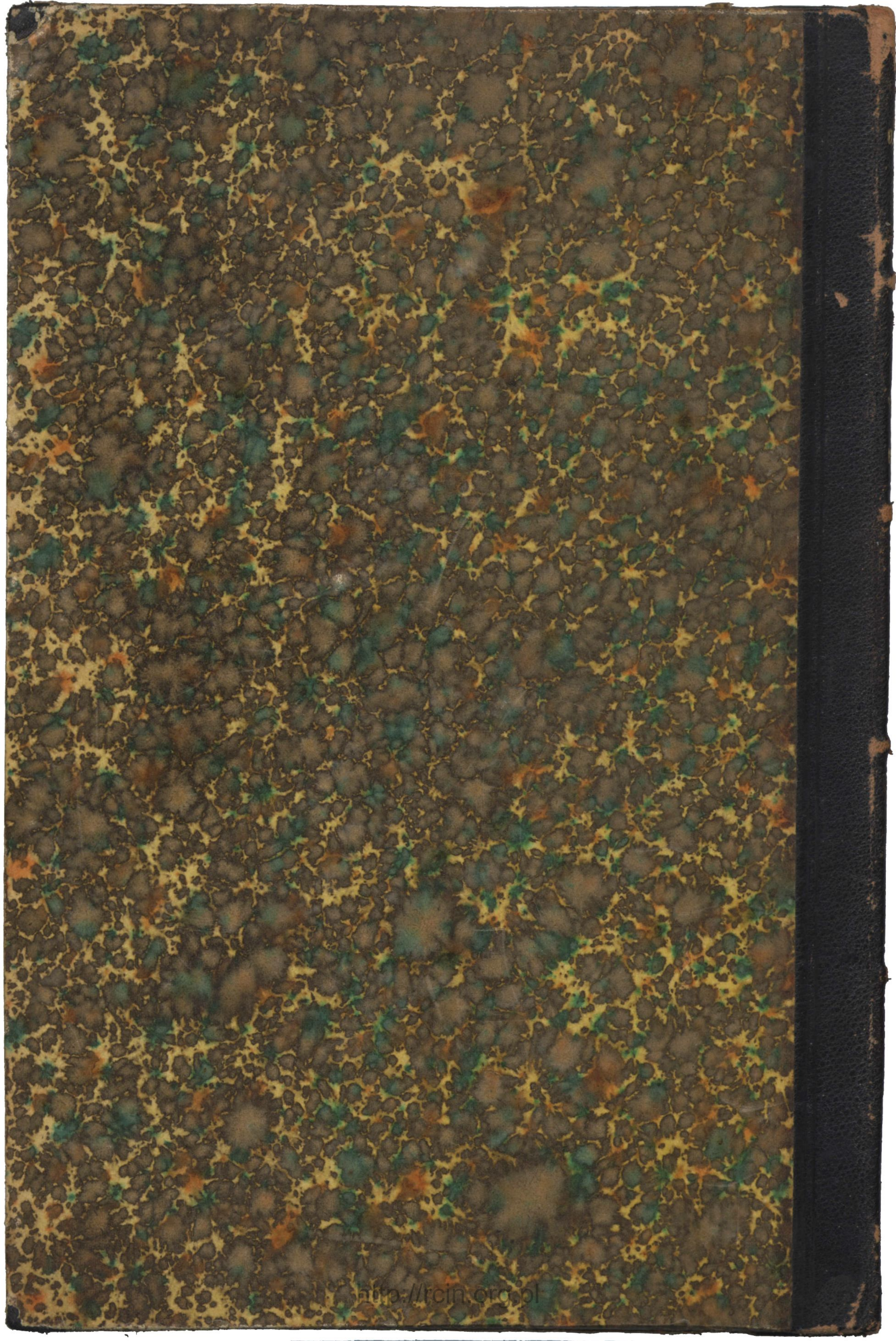
68) Ueber „die Erfahrung als Bestätigung der Richtigkeit des Erkennens“ vrgl. Volkelt a. a. O. S. 256.

69) In diesen beiden Wissenschaften sieht man deutlich, dass eine Sammlung und Sichtung von Erfahrungsthatsachen vorangehen muss, damit durch Induction die Gesetze gefunden werden können, durch welche dann erst die Deduction in einzelnen Theilen dieser Wissenschaften möglich ist. Man sieht dies hier deshalb deutlich, weil in diesen Wissenschaften heutzutage noch Erfahrungsthatsachen und zwar absichtlich gesammelt werden durch genaue Messungen und Experimente.

Register.

Die Zahlen bezeichnen die Seiten.






Und